Aufgabe 1 (Herbst1994)**.** Gegeben seien $a, b \in \mathbb{Q}^\times$. Zeigen Sie: Wenn es einen Körperisomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{a}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{b})$$

gibt, dann gilt $\frac{a}{b} \in (\mathbb{Q}^\times)^2$.

Lösung. Angenommen $\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \setminus 0$, also $a \in (\mathbb{Q}^\times)^2$, dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}$. Gibt es einen Isomorphismus φ wie in der Angabe, so ist auch $\mathbb{Q}(\sqrt{b}) = \mathbb{Q}$, das heißt $\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \setminus 0$, in anderen Worten $b \in (\mathbb{Q}^\times)^2$. Zusammen $\frac{a}{b} \in (\mathbb{Q}^\times)^2$.

Sei also $0 \neq \sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$, damit auch $0 \neq \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ Für jede natürliche Zahl gilt

$$\varphi(n) = \varphi(1 + \ldots + 1) = \varphi(1) + \cdots + \varphi(1) = n.$$

Also insbesondere $\varphi(a) = a$. Schreiben wir $\varphi(\sqrt{a}) = a_1 + a_2\sqrt{b}$. Also

$$a = \varphi(a) = \varphi(\sqrt{a})^2 = (a_1 + a_2\sqrt{b})^2 = a_1^2 + a_2^2 b + 2a_1a_2\sqrt{b}.$$

Da $\sqrt{b}$ irrational ist, ist notwendigerweise $a_1a_2 = 0$. Angenommen $a_2 = 0$, dann ist $a = a_1^2$, Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{a}$. Also ist $a_1 = 0$ und

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = a_2 \in \mathbb{Q}$$

rational. In anderen Worten

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) \in (\mathbb{Q}^\times)^2$$

wie gewünscht.

Dies beendet die Aufgabe. Wir bemerken noch, daß dies zeigt, daß $\frac{a}{b} \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ eine notwendige Voraussetzung dafür ist, daß ein Isomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{a}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{b})$ existiert.
Wir zeigen hier noch, daß es auch eine hinreichende Voraussetzung ist:
Sei $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = r$ rational. Wir definieren

$$\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{a}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{b}); a_1 + a_2\sqrt{a} \mapsto a_1 + a_2 r\sqrt{b}$$

und zeigen, daß dies ein Isomorphismus von Körpern ist. Da φ offensichtlich ein Isomorphismus von additiven Gruppen ist, genügt es zu zeigen, daß φ mit der Multiplikation kompatibel ist.

$$\begin{aligned}
\varphi((a_1 + a_2\sqrt{a})(a_1' + a_2'\sqrt{a})) &= \varphi(a_1a_1' + a_2a_2'a + (a_1a_2' + a_1'a_2)\sqrt{a}) \\
&= a_1a_1' + a_2a_2'a + (a_1a_2' + a_2a_1')r\sqrt{b} \\
&= a_1a_1' + a_2a_2'r^2b + (a_1a_2' + a_2a_1')rb \\
&= (a_1 + a_2r\sqrt{b})(a_1' + a_2'r\sqrt{b}) \\
&= \varphi(a_1 + a_2\sqrt{a})\varphi(a_1' + a_2'\sqrt{a})
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Herbst 2015)**.** Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Sei f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K. Zeigen Sie, daß f irreduzibel über $K(\beta)$ ist, genau dann, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist.

Lösung. Wir zeigen, daß g genau dann irreduzibel über $K(\alpha)$ ist, wenn $[K(\alpha, \beta) : K] = \deg(f)\deg(g)$.
„ $\Rightarrow$ “: Sei g irreduzibel über $K(\alpha)$. Da $g \in K[X] \subset K(\alpha)[X]$ normiert ist und $g(\beta) = 0$, ist g auch das Minimalpolynom von β über $K(\alpha)$. Es folgt

$$[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] = \deg(g).$$

Da f nach Voraussetzung das Minimalpolynom von α über K ist, gilt

$$[K(\alpha) : K] = \deg(f).$$

Mit der Gradformel erhalten wir

$$[K(\alpha,\beta):K] = [K(\alpha,\beta):K(\alpha)][K(\alpha):K] = \deg(g)\deg(f).$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei $[K(\alpha,\beta):K] = \deg(g)\deg(f)$. Wieder mit der Gradformel gilt

$$\deg(g)\deg(f) = [K(\alpha,\beta):K] = [K(\alpha,\beta):K(\alpha)][K(\alpha):K].$$

Wieder ist, da f nach Voraussetzung das Minimalpolynom von α über K ist,

$$[K(\alpha):K] = \deg(f).$$

Da $\mathbb{Z}$ ein Integritätsring ist, also $[K(\alpha,\beta):K(\alpha)] = \deg(g)$. Das Minimalpolynom h von β über $K(\alpha)$ muß g teilen, denn $g(\beta)=0$. Wäre h ein echter Teiler von g, so wäre $[K(\alpha,\beta):K(\alpha)] = \deg(h) < \deg(g)$, Widerspruch. Also $g = h$. Insbesondere ist g irreduzibel über $K(\alpha)$.

Genauso zeigt man, daß f genau dann irreduzibel über $K(\alpha)$ ist, wenn $[K(\alpha,\beta):K] = \deg(f)\deg(g)$. Zusammen ergibt dies die gewünschte Aussage.

Aufgabe 3 (Frühjahr 1985)**.** Berechne die Grade der folgenden Körpererweiterungen in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$:

(a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[7]{40})$.

(b) $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{8}})$.

Lösung. **Zu (a):** Es ist $\sqrt[7]{40} \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[7]{40}) \subset \mathbb{R}$. Das Element $\sqrt[7]{40}$ ist Nullstelle des Polynoms $X^7 - 40 \in \mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$. Also ist $\sqrt[7]{40}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, und der Grad der Erweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[7]{40})$ ist der Grad des Minimalpolynoms f von $\sqrt[7]{40}$.
Das Minimalpolynom f teilt $X^7 - 40$. Aber $X^7 - 40$ ist irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium für $p = 5$, denn $40 = 5 \cdot 2^3$. Also ist $f = X^7 - 40$ und

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[7]{40}):\mathbb{Q}] = \deg(f) = 7.$$

Zu (b): Es ist $e^{\frac{\pi i}{8}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{8}}) \subset \mathbb{C}$. Das Element $e^{\frac{\pi i}{8}}$ ist eine 16^{te} Einheitswurzel, also Nullstelle des Polynoms $X^16 - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Dieses ist jedoch weder irreduzibel über $\mathbb{Q}$, noch über $\mathbb{Q}(i)$. Das Element $e^{\frac{\pi i}{8}}$ erzeugt die Gruppe der 16^{ten} Einheitswurzeln $\mu_{16} \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. Ein solches Element nennt man primitiv. Diese Elemente entsprechen genau den invertierbaren Elementen von $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, also gibt es $|\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}^*| = \varphi(16) = 8$ Stück, wobei φ die Euler'sche φ-Funktion ist. Das Minimalpolynom von $e^{\frac{\pi i}{8}}$ über $\mathbb{Q}$ ist das 16^{te} Kreisteilungspolynom, dessen NUllstellen sind genau die primitiven 16^{ten} Einheitswurzeln. Da es 8 davon gibt, hat es Grad 8, und

$$[\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{8}}):\mathbb{Q}] = 8.$$

Andererseits ist auch i als NUllstelle des irreduziblen Polynoms $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, und damit $[\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}] = 2$. Mit der Gradformel sehen wir

$$8 = [\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{8}}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{8}}):\mathbb{Q}(i)] \cdot [\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}]$$

also $[\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{8}}):\mathbb{Q}(i)] = 4$.

Aufgabe 4. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ verschiedene Primzahlen. Man bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ über $\mathbb{Q}$.

Lösung. Sei $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$. Wir berechnen α^2, lösen nach $\sqrt{pq}$ auf, und uadrieren nochmal. Dies ergibt ein Polynom vom Grad 4:

$$f = X^4 - 2(p+q)X^2 + (p-q)^2 \in \mathbb{Q}[X].$$

Das Mnimalipolynom von α teilt f. Wir zeigen, daß f irreduzibel ist.
Zunächst beweisen wir, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$. Es ist klar, daß $\sqrt{p}+\sqrt{q} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$. Andersherum ist $\sqrt{p} - \sqrt{q} = \frac{p-q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ also auch $\sqrt{p}, \sqrt{q} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$.

Als nächstes zeigen wir, daß die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$ Grad 4 hat. Nach Aufgabe 2 sind $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ nicht isomorph. Beide haben Grad 2 über $\mathbb{Q}$, denn $X^2 - p$ und $X^2 - q$ sind Minimalpolynome von $\sqrt{p}$ bzw. $\sqrt{q}$ (da sie normiert sind und irreduzibel nach Eisenstein). Es gilt

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p})[\sqrt{q}].$$

Das Minimalpolynom von $\sqrt{q}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ muß $X^2 - q$ teilen, hat also Grad 1 oder 2. Nach der Gradformel ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}(\sqrt{p})][\mathbb{Q}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q}] \in \{2, 4\}$ Wäre es $= 2$, also $\sqrt{q} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, damit $\mathbb{Q}(\sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ Widerspruch. Also ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}] = 4$.

Aufgabe 5 (??)**.** Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, seien $\alpha, \beta \in L$ gegeben, so daß $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K sind. Man zeige, daß α und β algebraisch über K sind.

Lösung. Da $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K sind, ist $M = K[\alpha + \beta, \alpha\beta] = K(\alpha + \beta, \alpha\beta)$ endliche und damit algebraische Erweiterung von K. Betrachte das Polynom

$$f = (X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta \in M[X].$$

Es gilt $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Also sind α und β algebraisch über M. Also ist $M[\alpha, \beta] = M(\alpha, \beta)$ endliche und damit algebraische Erweiterung von M. Nach der Transitivität algebraischer Erweiterungen ist also auch $M[\alpha, \beta]/K$ algebraische Körpererweiterung. Also sind α und β algebraisch über K.

Aufgabe 6. Ist der Körper $\mathbb{C}(t)$ der rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschloßen?

Lösung. Wäre der Körper $\mathbb{C}(t)$ algebraisch abgeschlossen, so hätte das Polynom $X^2 - t$ eine Wurzel in $\mathbb{C}(t)$. In anderen Worten, es gäbe Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[t]$ mit

$$\left(\frac{P(t)}{Q(t)}\right)^2 - t = 0 \Leftrightarrow P^2(t) = tQ^2(t).$$

Aber dies ist unmöglich, da in der Zerlegung in irreduzible Polynome auf der linken Seite, die irreduziblen Faktoren nur in gerader Potenz vorkommen, während auf der rechten Seite auch irreduzible Faktoren in ungerader Potenz vorkommen, nämlich t. Aber die Zerlegung in irreduzible Elemente in dem faktoriellen Ring $\mathbb{C}[t]$ ist eindeutig, Widerspruch.