Aufgabe 1 (Frühjahr 2007)**.** Zeigen Sie:

(a) Ist R ein Hauptidealring, so ist jedes vom Nullideal verschiedene Primideal in R ein maximales Ideal.

(b) Ist R ein Integritätsring und der Polynomring $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

Aufgabe 2 (Herbst 2013)**.** Es sei p eine Primzahl. Man zeige, daß außer 3 jeder Primteiler von $2^p + 1$ gößer als p ist.
Hinweis: Betrachten Sie die multiplikative Ordnung von 2 modulo eines Primteilers von $2^p + 1$.

Aufgabe 3 (Frühjahr 2014)**.** Es seien K ein Körper, $K[X]$ der Polynomring über K und m, n nicht-negative ganze Zahlen. Zeigen Sie:
Sei $g = \mathrm{ggT}(m, n)$ in $\mathbb{Z}$, dann ist $X^g - 1$ ein größter gemeinsamer Teiler von $X^m - 1$ und $X^n - 1$ in $K[X]$.

Aufgabe 4 (Frühjahr 2002)**.** Sei $R = \mathbb{Z}[\![T]\!]$ der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

(a) Sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal in R. Zeigen Sie: $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z}$ ist ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten R^*.

(c) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale in R.

Aufgabe 5 (??)**.** Für $R = \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{Z}[X]$ untersuche man das durch die Primzahl $2 \in \mathbb{Z}$ erzeugte Hauptideal (2) in R und beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) (2) ist ein Primideal in R.

(b) (2) ist ein maximales Ideal in R.

Aufgabe 6 (??)**.** Sei R ein (unitärer) kommutativer Ring, $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Sei $1+a$ invertierbar für jedes Element $a \in \mathfrak{m}$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal von R ist.

Aufgabe 7 (??)**.** Sei R ein Integritätsbereich und $I \subset R$ ein Primideal, so daß der Index $[R : I]$ der additiven Gruppen $(R, +)$ und $(I, +)$ endlich ist. Zeigen Sie, daß I ein maximales Ideal von R ist.