

Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal?

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q} \\ &\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q} \\ &\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Lösung. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ist quadratisch, denn das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über \mathbb{Q} ist $X^2 - 3$. Also ist $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ normal.

Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ ist ebenso quadratisch, das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{3}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist $X^2 - \sqrt{3}$. Also ist diese Erweiterung ebenso normal.

Aber $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ ist nicht normal: das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{3}$ über \mathbb{Q} ist $X^4 - 3$, denn $\sqrt[4]{3}$ ist eine Nullstelle und das Polynom ist irreduzibel nach Eisenstein. Es zerfällt jedoch über $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ nicht in Linearfaktoren, sondern nur in $(X - \sqrt[4]{3})(X + \sqrt[4]{3})(X^2 + \sqrt{3})$.