Aufgabe 1 (Herbst 1989)**.** Seien

$$f := X^3 + 2X^2 - X - 1$$
$$g := X^2 + X - 3$$

Polynome in $\mathbb{Q}[X]$. Man zeige, daß es Polynome $a, b \in \mathbb{Q}[X]$ gibt mit

$$af + bg = 1;$$

man gebe a, b explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 2 (Frühjahr 2015)**.** Ein Ring R mit Eins heißt idempotent, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt Beweisen Sie:

(a) $-1 = 1$ in R.

(b) Jeder idempotente Ring ist kommutativ.

(3 Punkte)

Aufgabe 3 (Herbst 1981)**.** Sei R ein nullteilerfreier kommutativer Ring (nicht notwendig mit 1). Man beweise: Gibt es $a, c \in R$ mit $a \neq 0$ und $ac = a$, dann hat R ein Einselement, nämlich c. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (Frühjahr 1988)**.** (a) Sei R ein faktorieller Ring mit dem Quotientenkörper Q, sei weiter $f = f_0 + f_1X + \ldots + f_nX^n \in R[X]$ ein Polynom mit Koeffizienten in R. Eine Nullstelle von f sei $\frac{r}{s}$, wobei r und s teilerfremde Elemente aus R sind mit $s \neq 0$. Zeigen Sie, daß r Teiler von f_0 und s Teiler von f_n ist.

(b) Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen von

$$f = 3X^4 + 4X^3 - 12X^2 + 4X - 15 \in \mathbb{Z}[X].$$

(c) Zeigen Sie: $qX^3 - p$ ist in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel, wenn p und q verschiedene Primzahlen sind.

(6 Punkte)

Zusatzaufgabe (Herbst 1989)**.** Man untersuche

$$f := X^3 - 5X^2 + 25X + 10$$

auf Irreduzibilität in den Ringen $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{C}[X]$ (eine kurze Begründung genügt jeweils). (4 Punkte)