Thema: Fourierreihen, Wiederholung von Analysis II, Separationsansatz

Abgabe: Donnerstag, 19. Dezember 2019

Besprechung: Dienstag, 7. Januar 2020

Aufgabe 1. Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Seien

$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \ , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

die Fourierkoeffizienten von f. Man zeige, daß für $g = f'$

$$\hat{g}_k = ik\hat{f}_k \ , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

gilt.

Aufgabe 2. Es seien $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ gegeben mit

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (1 + |k|)|a_k| < \infty.$$

Man zeige, daß durch

$$f(x) := \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

eine 2π-periodische stetig differenzierbare Funktion definiert wird. Außerdem gilt

$$f'(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} ika_k e^{ikx} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien

$$u_N(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\sinh(k\pi)} \sin(k\pi x) \sinh(k\pi y) \qquad \text{für } x, y \in [0, 1]$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ die Partialsummen der Lösungsformel der Laplace-Gleichung aus der Vorlesung.

(a) Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Man zeige, daß dann für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ die u_N, und deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung zwei, gleichmäßig bezüglich $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1 - \varepsilon]$ konvergieren.
Hinweis: Man zeige und nutze, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$0 \leqslant \frac{\sinh(k\pi y)}{\sinh(k\pi)} \leqslant \frac{\cosh(k\pi y)}{\sinh(k\pi)} \leqslant Ce^{-\pi k(1-y)} \qquad \text{für } y \in [0, 1].$$

(b) Folgern Sie, daß $u(x, y) := \lim_{N\to\infty} u_N(x, y)$ bezüglich $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist und die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x, y) = 0 \qquad \text{für } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$$

erfüllt.
Bemerkung: Genauso kann man zeigen, daß u beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist.

(c) Nun sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar sowie $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so daß

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \qquad \text{für } x \in [0,1].$$

Man zeige, daß die u_N gleichmäßig gegen u bezüglich $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ konvergieren, und u die Randbedingungen

$$\begin{aligned} &u(0,y) = u(1,y) = 0 && \text{für } y \in [0,1], \\ &u(x,0) = 0 && \text{für } x \in [0,1] \\ &u(x,1) = f(x) && \text{für } x \in [0,1] \end{aligned}$$

erfüllt.
Hinweis: Man zeige zunächst $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$.