Thema: Isolierte Singularitäten, Laurentreihen, Residuensatz

Besprechung: Dienstag, 10. Dezember 2019

Aufgabe 1. Es seien holomorphe Funktionen definiert durch

$$\begin{aligned} f_1 &: D_{0,1}(0) \to \mathbb{C} z \mapsto \frac{1}{1-e^z} \\ f_2 &: D_{0,1}(0) \to \mathbb{C} z \mapsto e^{\frac{1}{z}} \\ f_3 &: D_{0,1}(0) \to \mathbb{C} z \mapsto \frac{\sin z}{z}. \end{aligned}$$

Man bestimme in allen drei Fällen, ob die Singularität bei 0 hebbar, ein Pol oder eine wesentliche Singularität ist.
Ist sie hebbar, so setze man f_k holomorph auf $B_1(0)$ fort.
Ist sie wesentlich, so bestimme man das Bild $f_k\left(D_{0,\varepsilon}(0)\right)$ für alle $0 < \varepsilon < 1$.

Aufgabe 2. Es sei

$$f : \mathbb{C}\backslash\{1, 0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{1-z} + \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

(a) Man entwickle f in eine Laurentreihe um 0 in $\{0 < |z| < 1\}$ und bestimme $\operatorname{Res}_0(f)$.

(b) Man bestimme den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von f um 1 in $\{0 < |z-1| < 1\}$ und bestimme $\operatorname{Res}_1(f)$.

(c) Man berechne die Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(z)dz, k = 1, 2$$

für

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it} \\ \gamma_2 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{2}e^{2it} + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $u \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $D_{0,r}(z_o) \subset U$ für $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Sei weiter

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

die Laurent-Reihe von f um z_0.
Man zeige, daß z_0 genau dann ein Pol der Ordnung m ist, wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < -m$.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $w \in U$. Man zeige, daß

$$g : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{falls } z \in U\backslash\{w\} \\ f'(z) & \text{falls } z = w \end{cases}$$

holomorph ist.