Thema: Cauchy'scher Integralsatz, Stammfunktion

Abgabe: Donnerstag, 21. November 2019

Besprechung: Dienstag, 26. November 2019

Aufgabe 1. Für welche der folgenden Funktionen existiert eine Stammfunktion auf dem gesamten angegebenen Definitionsbereich? Geben Sie entweder eine an, oder begründen Sie, warum keine solche existiert.

(a)
$$f : \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{1}{z^2+1},$$

(b)
$$f : \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{1}{z^2+1},$$

(c)
$$g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}.$$

Aufgabe 2. Sei $C = \partial B_1(0) \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis, $U \subset \mathbb{C}$ offen, mit $\overline{B_1(0)} \subset U$, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

(a) Man drücke folgendes Integral in Abhängigkeit von Werten von f und f' aus:
$$\int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz.$$

(b) Damit leite man den Wert von
$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(\frac{t}{2}) dt$$
ab (in Abhängigkeit von $f(0)$ und $f'(0)$).

Aufgabe 3. Man berechne die Integrale

(a)
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z(z+2)} dz,$$

(b)
$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z(z+2)} dz,$$

(c)
$$\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z+2)} dz.$$

Aufgabe 4. Man berechne das Integral
$$\int_\gamma \overline{z} dz,$$
wobei γ der Pfad (in $\mathbb{R}^2$) vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(2,4)$ entlang der Parabel $y = x^2$ ist.