Thema: Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, Kurvenintegral

Abgabe: Donnerstag, 14. November 2019

Besprechung: Dienstag, 19. November 2019

Aufgabe 1. Sei $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Man zeige, daß es $w \in \mathbb{C}$ gibt, so daß A die komplex-lineare Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto w \cdot z$$

beschreibt. In anderen Worten,

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re\left(w \cdot (x+iy)\right) \\ \Im\left(w \cdot (x+iy)\right) \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Man zeige, daß A eine Drehstreckung beschreibt.

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir identifizieren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, und definieren $f_\Re, f_\Im : U \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f_\Re(x) = \begin{pmatrix} \Re f(x_1+ix_2) \\ -\Im f(x_1+ix_2) \end{pmatrix}, \qquad f_\Im(x) = \begin{pmatrix} \Im f(x_1+ix_2) \\ \Re f(x_1+ix_2) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Weiter sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Man zeige

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f_\Re(x) \cdot dx + i \int_\gamma f_\Im(x) \cdot dx.$$

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ stetig differenzierbare Kurven, so daß $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Definiere $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [0,1] \to U$ und $\gamma_1^- : [0,1] \to U$ durch

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2(t-\frac{1}{2})) & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
$$\gamma_1^-(t) := \gamma_1(1-t) \text{ für alle } t \in [0,1]$$

Man zeige

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$
$$\int_{\gamma_1^-} f(z)dz = -\int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) Für eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ zeige man

$$\Delta|f|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

(b) Seien $f_1, \ldots, f_p : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Angenommen, $|f_1|^2 + \cdots + |f_p|^2$ ist konstant. Man zeige, daß dann jedes f_i konstant ist.