Thema: Integralsätze, holomorphe Funktionen

Abgabe: Donnerstag, 7. November 2019

Besprechung: Dienstag, 12. November 2019

Aufgabe 1. Sei $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel vom Radius $r > 0$ um 0. Man zeige

$$\mathrm{vol}_{n-1}\left(\partial B_r(0)\right) := \int_{\partial B_r(0)} dV_{\partial B_r(0)} = \frac{n}{r}\mathrm{vol}_n\left(B_r(0)\right).$$

Hinweis: Man betrachte $\int_{\partial B_r(0)} x \cdot \nu d\sigma(x)$ mit der äußeren Einheitsnormalen ν an $\partial B_r(0)$.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{|x|}$. Sei $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und äußerer Normalen ν.

(a) Man zeige, daß f harmonisch ist, das heißt $\Delta f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

(b) Man berechne

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{grad} f \cdot \nu dV_{\partial\Omega} = -4\pi.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\Omega \backslash \overline{B_\varepsilon(0)}$ für $\epsilon > 0$ genügend klein. Sie dürfen verwenden, daß $\mathrm{vol}_3(B_\varepsilon(0)) = \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3$.

Aufgabe 3. (a) Man zeige, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k} = 1 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

(b) Man zeige, daß

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \qquad \text{falls } |z| < 1.$$

Hinweis: Geometrische Reihe.

(c) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+3i}{5}\right)^n \frac{z^n}{n+2}.$$

Aufgabe 4. Man zeige folgende Aussagen.

(a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann sind auch $f + g : U \to \mathbb{C}$ und $f \cdot g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für alle $z \in U$ gilt

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$
$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

(b) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen sowie $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph, so daß $f(U) \subset V$.
Dann ist $g \circ f :: U \to \mathbb{C}$ holomorph und es gilt für alle $z \in U$

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$