Fakultät für Physik WS 15/16
Prof. Rupert Huber, Prof. Milena Grifoni

Übungen zu Integrierter Kurs II - Festkörper und Statistische Physik
Blatt 8

Übungsleiter:

Dr. Andrea Donarini (3.1.24, phone 2040) (Theorie, Do 8:30h - 12h, Phy 2.1.29)
Dr. Christoph Lange (2.0.07, phone 5704) (Experiment, Fr 12h - 14h c.t., Phy 2.1.29)

Part I: Theory

8.1 Planck's law

Photons are the quantized excitations of electromagnetic radiation with dispersion relation $E_{\vec{k}} = \hbar c|\vec{k}|$, where c is the speed of light and $\vec{k}$ the photon wave vector.

a) Consider the photons contained in a cubic metallic cavity of volume V whose walls are at temperature T (a black body). The average total photon energy E_{ph} can be written as:

$$E_{\mathrm{ph}} = \sum_{\vec{k}m} E_{\vec{k}} n_{\vec{k}} = V \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, u(\omega)$$

where $n_{\vec{k}}$ is the Bose-Einstein distribution, $m = \pm$ the photon elicity and ω the photon frequency. Derive the form of the energy spectral density $u(\omega)$. **(2 Points)**

b) Prove that the total energy of the photons is proportional to the T^4 (Stefan-Boltzmann law). Calculate explicitly the proportionality factor to obtain:

$$E = \frac{4\sigma}{c} V T^4$$

where c is the speed of light and $\sigma = \frac{\pi^2 k_{\mathrm{B}}^4}{60\hbar^3 c^2}$ is the Stefan-Boltzmann constant. **(2 Points)**

8.2 Thermal radiation (in class)

The measured energy current density from the Sun arriving on Earth is 1.37 kW/m^2 (solar constant).

a) Calculate the total energy current I_E leaving the Sun (its luminosity) assuming that the Sun is a perfect blackbody, that the distance between the Sun and the Earth is $150 \cdot 10^9$ m, and that the Sun's radius is $7 \cdot 10^8$ m.

b) Calculate the surface temperature of the Sun. At which energy and at which wavelength λ do you find a maximum in the spectrum? (Be careful when rewriting the Planck's function in terms of λ.)

c) Estimate the expected temperature of the Earth surface by balancing the incoming and outgoing energy currents (the Earth's radius is 6400 km). Try both an assumption that the Earth is a perfect blackbody and a more realistic one, that the Earth emits only 70% of the energy which would be emitted by a blackbody at the same temperature.

d) By how much would the temperature of the Earth surface rise if the temperature of the Sun rose by 5%?

8.3 Occupation number representation

Let us consider a fermionic system with two single particle basis states $|\alpha\rangle$ and $|\beta\rangle$.

a) Which dimension has the *two*-particle Hilbert space? Which dimension has the entire Fock space? Write down the basis of the Fock space explicitly as Slater determinants of the wave functions $\phi_\alpha(\mathbf{r})$, $\phi_\beta(\mathbf{r})$ and in the occupation number representation. **(2 Points)**

b) Calculate, in the Fock basis, the matrix representation of the creation and annihilation operators c_μ, $c_\mu^\dagger$ ($\mu = \alpha, \beta$) and also of the occupation operators $n_\mu = c_\mu^\dagger c_\mu$ **(2 Points)**

c) Verify one of the the anticommutator relations

$$[c_\mu, c_\nu]_+ = [c_\mu^\dagger, c_\nu^\dagger]_+ = 0\,, \quad [c_\mu, c_\nu^\dagger]_+ = \delta_{\mu\nu}$$

explicitly using matrix multiplication of the matrices calculated at point b). **(2 Points)**

8.4 Contact potential

Consider a set of spin $\frac{1}{2}$ Fermions which only interact if their relative distance reduces to zero $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Write the associated two particle operator in second quantization, both in the position and momentum basis. Discuss the differences with the Coulomb interaction.

(1 Point)

Part II: Experiment

8.5 Drei-, zwei- und eindimensionales Elektronengas

Betrachten Sie ein Gas freier Elektronen.

(a) Leiten Sie für $T = 0$ die Beziehungen für die Fermienergie E_F (als Funktion der Elektronenzahl N), für die mittlere Teilchenenergie $\overline{E}$ (als Funktion von N und E_F) und für die Zustandsdichte $D(E) = \frac{dN}{dE}$ her

  (1) für ein dreidimensionales,

  (2) für ein zweidimensionales,

  (3) für ein eindimensionales Elektronengas. (3 Punkte)

(b) Leiten Sie einen Ausdruck für das chemische Potential $\mu(T)$ für endliche Temperaturen T für ein zweidimensionales Gas her. (1 Punkt)

(c) Wie hängt das chemische Potential μ für $k_\mathrm{B}T \ll E_\mathrm{F}$ für den drei- und für den eindimensionalen Fall näherungsweise von der Temperatur T ab? (2 Punkte)

Hinweis: Dieser Aufgabenteil erfordert eine Entwicklung des Integrals

$$\int_0^\infty g(E) f(E,T)\, dE = \int_0^\mu g(E)\, dE + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \frac{d}{dE} g(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}(k_\mathrm{B}T)^4 \frac{d^3}{dE^3} g(\mu) + \ldots$$

mit der Fermi-Dirac Verteilungsfunktion $f(E,T)$.

8.6 Fermi-Gas in Graphen

Wir betrachten das zweidimensionale Elektronengas in Graphen, welches eine lineare Dispersion $E(k) = \hbar k v_\mathrm{F}$ aufweist. Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ und ermitteln sie ihren Wert an der Fermi-Kante. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem allgemeinen Ergebnis für ein Fermi-Gas mit parabolischer Dispersion. (1 Punkt)

8.7 Elektronische spezifische Wärmekapazität von Kupfer

Diskutieren Sie folgende thermische Eigenschaften von Kupfer:

(a) Berechnen Sie im Modell freier Elektronen für Kupfer den elektronischen Beitrag zur spezifischen Wärmekapazität $c_{V,\mathrm{el}}$ bei der Temperatur $T = 300\,\mathrm{K}$. (1 Punkt)

(b) Schätzen Sie den Beitrag der Phononen $c_{V,\mathrm{ph}}$ bei dieser Temperatur ab. (1 Punkt)

(c) Bei welcher Temperatur gilt $c_{V,\mathrm{el}} = c_{V,\mathrm{ph}}$? (1 Punkt)

(d) Berechnen Sie für Kupfer die Sommerfeld-Konstante $\gamma = c_{V,\mathrm{el}}/T$ und vergleichen Sie diese mit dem experimentell ermittelten Wert $\gamma_{\mathrm{exp}} = 97,53\,\mathrm{J/(m^3K^2)}$. Verwenden Sie eine Dichte von $n = N/V = 8.45 \times 10^{28}\,/\mathrm{m}^3$ und eine Debye-Temperatur von $\Theta_\mathrm{D} = 343\,\mathrm{K}$. (1 Punkt)