Fakultät für Physik WS 12/13
Prof. Christian Back, Prof. Milena Grifoni

Übungen zu Integrierter Kurs II - Festkörper und Statistische Physik
Blatt 8

Übungsleiter:

Dr. Andrea Donarini (3.1.24, phone 2040) (theory, Tue 12h-14h c.t., Phy 7.3.14)
Sebastian Putz (4.1.36, phone 2032) (experiment, Thu 10h-12h c.t., Phy 7.3.14)

Part I: Theory

8.1 Bose gas in 2D-space

Consider an ideal Bose gas in two dimensions. Can it condensate? Explain the answer. (2 points)

8.2 Bose gas: phase transition to the condensate

Of what order is the phase transition to the Bose-Einstein condensate? Justify your answer. (2 points)

8.3 Bose-Einstein condensation in trapped gases

Consider N spinless alkali atoms in a magnetic trap. The confinement potential can be simply approximated with the quadratic form

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right),$$

where m is the mass of an alkali atom.

1. Write down the energy levels of the atoms in the trap. (1 point)

2. What is the critical chemical potential μ_c in the condensed state? (1 point)

3. Show that the difference between the total atom number N and that of the atoms in the ground state, N_0, is

$$N - N_0 = \zeta(3)\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_0}\right)^3,$$

with $\omega_0 = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ and $\zeta(x)$ is the Riemann zeta function defined as

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1}du = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

(2 points)

4. Show that the critical temperature

$$k_B T_c = \hbar\omega_0\left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3} = 0.94\,\hbar\omega_0 N^{1/3},$$

and therefore the fraction of atoms in the ground state is

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3.$$

(2 points)

8.4 Imperfect Bose gases

We consider a dilute gas of N spinless bosons with mass m in a box of volume V at very low temperature. Suppose that the interaction potential between the two atoms is a finite ranged potential which can be characterized by its scattering length a. The energy levels of the system up to the first order in a are then

$$\epsilon_{\{n_{\mathbf{p}}\}} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}} + \frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \left(N^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^2 \right),$$

where $n_{\mathbf{p}}$ is the number of bosons with momentum $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. At low temperature, most bosons are in the ground state and therefore $N_0 \sim N \gg n_{\mathbf{p}}$ with $\mathbf{p} \neq 0$. The energy levels can thus be further approximated as

$$\epsilon_{\{n_{\mathbf{p}}\}} \approx \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}} + \frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \left(N^2 - \frac{1}{2} N_0^2 \right).$$

Show that near the Bose-Einstein condensation the fraction of particles in the ground state is

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2},$$

and that the critical temperature and critical volume are

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{\zeta(3/2) V} \right)^{2/3}, \qquad V_c = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T} \right)^{3/2} \frac{N}{\zeta(3/2)}.$$

That is, the imperfect Bose gas behaves similarly to the ideal Bose gas. (3 points)

Part II: Experiment

8.5 Beugung an Kristallen

Ein Kristall mit Netzebenenabstand $d = 1.8 \times 10^{-10}$ m soll mit Neutronen, Elektronen und Photonen untersucht werden. Die Raumgitterinterferenzen bei der elastischen Streuung sollen in allen drei Fällen einen Glanzwinkel von 60° in erster Beugungsordnung erzeugen.

1. Welche kinetische Energie müssen Neutronen für dieses Experiment besitzen? Geben Sie diese in der Einheit eV an. (1 Punkt)
2. Wie groß muss die kinetische Energie im Falle der Elektronen sein? Welchen Brechungswinkel bewirken diese Kristallebenen im Falle eines Elektronenmikroskops mit 100 kV Beschleunigungsspannung? (1 Punkt)
3. Wie groß ist die Energie (in der Einheit eV) von Röntgenstrahlen, wenn das obige Experiment mit diesen durchgeführt wird? (1 Punkt)

8.6 Das reziproke Gitter (Teile 3 und 4 in der Übung)

Gegeben sein ein beliebiges Bravaisgitter mit den primitiven Gittervektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$.

1. Zeigen Sie, dass die durch

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

definierten Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ die primitiven Gittervektoren des entsprechenden reziproken Gitters sind. (1 Punkt)

2. Zeigen Sie damit, dass das reziproke Gitter des reziproken Gitters wieder das ursprüngliche Gitter ist. (1 Punkt)

3. Zeigen Sie, dass der reziproke Gittervektor $\vec{G}(hkl) = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$ senkrecht auf den Netzebenen mit Millerindizes $\{hkl\}$ steht.

4. Zeigen Sie, dass für den Abstand $d_{(hkl)}$ benachbarter Netzebenen zu den Millerindizes (hkl) gilt: $d_{(hkl)} = 2\pi|\vec{G}(hkl)|^{-1}$.

8.7 Gitter und Beugung

1. Skizzieren Sie die Atomanordnung in einer Elementarzelle eines kubisch flächenzentrierten Kristalls mit der Gitterkonstanten $a = 2.5$ Å. Markieren Sie die Lage einer (111)-Ebene in dieser dreidimensionalen Elementarzelle. Zeichnen Sie eine Elementarzelle des aus einer (111)-Ebene gebildeten zweidimensionalen Gitters mit Winkeln und Atomabständen. (1 Punkt)

2. Skizzieren Sie das zu diesem ebenen zweidimensionalen Gitter reziproke Gitter derart, dass die Beziehung zum Realgitter (mit Winkeln und Gitterpunkt-Abständen) deutlich wird. (1 Punkt)

3. Röntgenstrahlung treffe senkrecht auf die (111)-Ebene des Kristalls und werde in sich zurück auf einen Leuchtschirm in 10 cm Abstand von der Oberfläche reflektiert. Welchen Abstand hat ein Reflex erster Beugungsordnung vom Durchstoßpunkt des Röntgenstrahls, wenn Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 1.0$ Å verwendet wird? (1 Punkt)

4. Welcher Abstand ergibt sich für diese Reflexe, wenn Elektronen, die eine Beschleunigungsspannung von 300 V durchlaufen haben, für die Beugung verwendet werden. (1 Punkt)

5. Wodurch unterscheiden sich die Informationen aus Röntgen- und Elektronenbeugung? (1 Punkt)

8.8 Strukturfaktor (Teil 2 in der Übung)

Bei der Beugung von Wellen an Kristallgittern lässt sich die Streuamplitude A für den Streuvektor $\vec{K} = \vec{G}$ als

$$A = \int_{\text{Kristall}} d^3r\ \rho(\vec{r})e^{-i\vec{G}\vec{r}} = N \int_{\text{Zelle}} d^3r\ \rho(\vec{r})e^{-i\vec{G}\vec{r}} = N \cdot S_{\vec{G}}$$

schreiben, d.h. als Fouriertransformierte der Dichte $\rho(\vec{r})$ zum reziproken Gittervektor $\vec{G}$. Die Streuamplitude ist dabei gleich der Anzahl N der beteiligten Gitterzellen multipliziert mit dem sog. Strukturfaktor

$$S_{\vec{G}} = \int_{\text{Zelle}} d^3r\ \rho(\vec{r})e^{-i\vec{G}\vec{r}}.$$

Für s punktförmige identische Atome als Basis des Kristallgitters ist

$$S_{\vec{G}} = \sum_{j=1}^{s} f e^{-i\vec{G}\vec{r}_j}$$

mit dem konstanten Atomformfaktor f. Es sei nun $\vec{G}(hkl) = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$ mit dem oben definierten reziproken Basisvektoren b_i $(i = 1, 2, 3)$.

1. Bestimmen Sie diejenigen (hkl), für die der Strukturfaktor $S_{\vec{G}(hkl)}$ nicht verschwindet. Wie groß ist $S_{\vec{G}(hkl)}$ jeweils? (1 Punkt)

2. Spekulieren Sie, warum man bei Beugung am NaCl-Kristallgitter weniger Beugungsordnungen sieht.