

Übungen zu Integrierter Kurs II - Festkörper und Statistische Physik Blatt 5

Übungsleiter:

Dr. Andrea Donarini (3.1.24, phone 2040)
Sebastian Putz (4.1.36, phone 2032)

(theory, Tue 12h-14h c.t., Phy 7.3.14)
(experiment, Thu 10h-12h c.t., Phy 7.3.14)

Part I: Theory

5.1 Maxwell-Verteilung

Die Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ der Teilchen in einem klassischen Gas lautet

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m v^2}{2k_B T}\right).$$

1. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\langle |\vec{v}| \rangle$ und das mittlere Geschwindigkeits-Quadrat $\langle \vec{v}^2 \rangle$ eines Gases mit Hilfe der Maxwell-Verteilung. (2 Punkte)
2. Welche Zahlenwerte erhalten Sie für He und N₂ Gas bei $T = 300$ K? (1 Punkt)
3. Können Sie aufgrund des Ergebnisses in 2. erklären, warum die Erdatmosphäre fast kein He (mehr) enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: denken Sie an die kosmische Geschwindigkeiten. (2 Punkte)

5.2 Rotationsbeitrag zu c_V

Der Rotationsbeitrag zur freien Energie pro Teilchen eines idealen Gases beträgt

$$f_{\text{rot}}(T) = -k_B T \ln z_{\text{rot}}(T),$$

wobei $z_{\text{rot}}(T)$ die Zustandsumme für ein Teilchen ist.

1. Schreiben Sie die Rotations-Zustandsumme für einen molekularen Rotator mit den Energiewerten $\epsilon_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} = k_B \Theta_{\text{rot}} l(l+1)$, für $l = 0, 1, 2, \dots$ auf. Beachten Sie, dass die Zustände $(2l+1)$ -fach entartet sind. (2 points)
2. Wie verhält sich $z_{\text{rot}}(T)$ im Grenzfall höher Temperaturen $T \gg \Theta_{\text{rot}}$? Zeigen Sie, dass sich $z_{\text{rot}}(T)$ in diesem Fall in ein Integral umschreiben lässt, und berechnen Sie damit die Hochtemperatur-Werte von der Entropie pro Teilchen $s(T)$ und der Wärmekapazität pro Teilchen $c_V(T) = T(\partial s / \partial T)_V$. Genügt das Ergebnis dem Gleichverteilungssatz? (3 Punkte)

5.3 Magnetische Kühlung (2, 3, 4 in class)

Die Zustandssumme eines Elektronspins im Magnetfeld lautet: $z(T, B_{\text{ext}}) = 2 \cosh\left(\frac{\mu_B B_{\text{ext}}}{k_B T}\right)$.

1. Leiten Sie die Entropie pro Teilchen $s(T, B_{\text{ext}})$ aus der freien Energie im Magnetfeld $f(T, B_{\text{ext}}) = -k_B T \ln z(T, B_{\text{ext}})$ ab. Stellen Sie das Ergebnis als Funktion von T (für verschiedene B_{ext}) und B_{ext} (für verschiedene T) mittels QtiPlot, Origin, Maple etc. graphisch dar. (2 Punkte)
2. Warum lässt sich dieses Verhalten zur Kühlung des Spinsystems und seiner Umgebung durch adiabatische Entmagnetisierung ausnutzen?
3. Zeigen Sie, dass sich das Verhalten von s für kleine B_{ext}/T durch

$$s(T, B_{\text{ext}}) = s_0 - \alpha \left(\frac{B_{\text{ext}}}{T}\right)^2 + \dots \quad (*)$$

approximieren lässt und bestimmen Sie die konstante α . Bei welcher Temperatur wird diese Näherung schlecht?

4. Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Maxwell-Relation, dass aus (*) das Curie-Gesetz $\chi_m = A/T$ folgt, und bestimmen Sie die Curie-Konstante $A = A(\alpha)$.

Part II: Experiment

5.4 Temperatur einer Flamme

Bei einem Brennschneidegerät werde ein Wasserstoff-Sauerstoff-Gemisch zu Wasser verbrannt ($\text{H}_2 + \frac{1}{2}\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O}$). Berechnen Sie die Temperatur der Flamme dieses Brennschneidegerätes! Gehen Sie dabei davon aus, dass der Wasserstoff und Sauerstoff anfangs eine Temperatur von 25°C haben, dass die Standardverbrennungsenthalpie bei 25°C zur Erzeugung von Wasserdampf -242 kJ/mol ist, und dass die spezifische Wärmekapazität von Wasserdampf bei konstantem Druck durch $c_p = (30.1 + 9.6 \times 10^{-3} \frac{T}{\text{K}}) \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ gegeben ist. Nehmen Sie außerdem an, dass die Reaktion so schnell abläuft, dass keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht werden kann. (1 Punkt)

5.5 Diamant und Graphit

Gegeben seien bei $\theta = 25^\circ\text{C}$ und einem Druck von $P = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ die molaren Enthalpien H^0 , die molaren Entropien S^0 und die Dichten ρ :

Diamant $H^0 = 720.28 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, $S^0 = 2.5104 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho = 3.52 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Graphit $H^0 = 718.39 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, $S^0 = 5.6902 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho = 2.26 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

1. Welche ist bei den gegebenen Bedingungen die stabile kristalline Form? (1 Punkt)
2. Unter welchem Druck wird die andere Form bei der Temperatur θ stabil? (1 Punkt)

5.6 Phasenübergänge

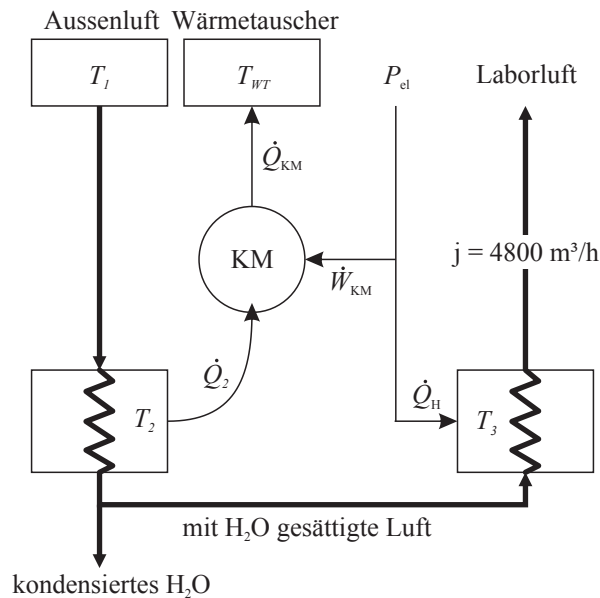
Zeigen Sie, dass sich bei Phasenübergängen zweiter Art die thermodynamischen Koeffizienten C_p , α , κ_T unstetig ändern. (1 Punkt)

5.7 Der kritische Zustand des van der Waals-Gases

1. Der kritische Zustand des van der Waals-Gases ist dadurch definiert, dass die Extrema und der Wendepunkt der Isothermen im P-V Diagramm verschmelzen. Berechnen Sie P_c , T_c und v_c am kritischen Punkt. (1 Punkt)
2. Berechnen Sie α und κ_T für das van der Waals-Gas. Wie verhalten sich diese Koeffizienten am kritischen Punkt? (1 Punkt)

5.8 Kältemaschinen

Für die Klimatisierung der neuen Laserlabore des Lehrstuhls soll eine Klimaanlage dimensioniert werden (siehe Abbildung). Zunächst wird dazu die Aussenluft (Temperatur $\theta_1 = 30^\circ\text{C}$, relative Luftfeuchte $\phi_1 = 65\%$) mittels einer Kältemaschine KM isobar auf T_2 abgekühlt und überschüssiges Wasser auskondensiert. Die dann mit Wasser gesättigte Luft wird anschließend durch eine Heizung isobar auf die Endtemperatur von $\theta_3 = 20^\circ\text{C}$ aufgewärmt. Die Anlage wird so dimensioniert, dass ein Volumenstrom von $j = 4800 \text{ m}^3/\text{h}$ erreicht wird.



1. Auf welche Temperatur T_2 muss die Aussenluft abgekühlt werden, um die gewünschte relative Luftfeuchtigkeit von $\phi_3 = 40\%$ in der Raumluft zu erreichen? Verwenden sie für Wasser die molare Verdampfungsenthalpie von $q = 4 \times 10^4 \text{ J/mol}$. Welcher maximale Wirkungsgrad $\eta_{\max} = Q_2/W_{\text{KM}}$ kann von der Kältemaschine erreicht werden, wenn der auf dem Dach installierte Wärmetauscher eine Arbeitstemperatur von $\theta_{\text{WT}} = 50^\circ\text{C}$ hat? (2 Punkte)
2. Die Kältemaschine erreiche 46% des idealen Wirkungsgrades. Welche Leistung \dot{W}_{KM} wird benötigt, um die Kältemaschine zu betreiben? Welche Abwärmeleistung \dot{Q}_{KM} muss der Wärmetauscher auf dem Dach haben? *Hinweise: Alle Temperaturänderungen erfolgen isobar. Die isobare Wärmekapazität von Luft sei $c_p = 1.005 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$, die Dichte der Laborluft sei $\rho_{\text{Luft}} = 1.20 \text{ kg/m}^3$ bei der Temperatur T_3 , der Sättigungsdampfdruck von Wasser sei $P_d = 4.24 \times 10^3 \text{ Pa}$ bei der Temperatur T_1 . Beachten Sie, dass \dot{Q}_2 auch die Kondensationsenthalpie des überschüssigen Wassers beinhaltet.* (2 Punkte)
3. Welche elektrische Gesamtleistung P_{el} ist notwendig, um das System aus Kältemaschine und Zusatzheizung zu betreiben? *Um Energie zu sparen, würde man allerdings versuchen, die Abwärme \dot{Q}_{KM} zumindest teilweise zum Aufwärmen der Luft von T_2 auf T_3 zu verwenden.* (1 Punkt)