

Übungen zu Integrierter Kurs II - Festkörper und Statistische Physik Blatt 2

Übungsleiter:

Dr. Andrea Donarini (3.1.24, phone 2040)
Sebastian Putz (4.1.36, phone 2032)

(theory, Tue 12h-14h c.t., Phy 7.3.14)
(experiment, Thu 10h-12h c.t., Phy 7.3.14)

Part I: Theory

2.1 Energy spectrum of the 3-dimensional quantum mechanical harmonic oscillator

Start by writing down the Hamiltonian for the 1-dimensional quantum mechanical harmonic oscillator (cf. Quantum Mechanics lectures). What does the energy spectrum look like?

1. Generalize this Hamiltonian to the 3-dimensional case, assuming the space to be isotropic. (1 point)
2. Discuss the resulting energy spectrum by finding the 7 lowest eigenvalues and their degeneracy, i.e. the Ω -function. (2 points)
3. Can you give a general expression for the degeneracy Ω of the n -th energy eigenvalue? What is the result in a general number of p dimensions? (Hint: Ω can be expressed as a binomial coefficient.) (3 points)

2.2 Gaussian Random Variables

We consider a random variable that is Gaussian distributed with mean μ and mean square deviation (variance) σ^2 ,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

1. What is the probability of an event within the interval $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$, i.e. within two standard deviations ('Standardabweichung', or 'root-mean-square deviations' (RMS)) from the mean value?
(The result should be written in terms of the error function. A numerical estimate can be obtained consulting a numerical table or a program, such as Mathematica or Maple.) (2 points)
We now consider two independent random variables, x and y , that are both Gaussian distributed with means \bar{x} and \bar{y} , and standard deviations σ_x and σ_y .
2. What is the probability distribution of $P(z)$ for $z = x + y$? (2 points)
3. What do you obtain for \bar{z} , \bar{z}^2 and σ_z^2 ? (The values may be read off from the result obtained in 2.) (2 points)

2.3 Radioaktiver Zerfall und Poisson-Verteilung (in class)

Wir betrachten den α -Zerfall einer radioaktiven Substanz im Zeitraum t . Im kleinen Zeitintervall Δt findet ein Zerfall mit der Wahrscheinlichkeit p ($\ll 1$) statt. Entsprechend zerfällt mit einer Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ nichts. Das Zeitintervall Δt soll dabei so kurz gewählt sein, dass nur ein Zerfall in diesem Zeitraum stattfinden kann (und dass die Wahrscheinlichkeit für einen Zerfall unabhängig von anderen Zerfällen ist). Alle Zeitintervalle werden als unabhängig betrachtet. Die Gesamtzahl der Versuche sei $N = t/\Delta t \gg 1$.

1. Die Poisson-Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Zeitabschnitt eine bestimmte Anzahl von Ereignissen stattfindet. Man zeige, dass die Wahrscheinlichkeit $P_n(t)$ für n Zerfälle in der Zeit t einer *Poisson-Verteilung* folgt, d.h. dass

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} (Np)^n e^{-Np}.$$

2. Wenn die mittlere Zerfallsrate $30/\text{min} = 0.5/\text{sec}$ beträgt, was ist die Wahrscheinlichkeit für n Zerfälle in $t = 10 \text{ sec}$? Wie lautet das Ergebnis (Zahlenwert) für $n = 0, \dots, 7$?
3. In welchem Limes gelangt man zur *Binomial-Verteilung*? Welche Überlegungen führen andererseits zum *deterministischen* Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall (d.h. $m(t) = m(0) e^{-t/T_0}$)?

Part II: Experiment

2.4 Adiabatische Entspannung

Durch eine adiabatische Entspannung werden 3 Mol eines idealen, einatomigen Gases von 313 K auf 293 K abgekühlt. Berechnen Sie die als Arbeit und die als Wärme ausgetauschte Energie.

2.5 Thermodynamische Potentiale und Maxwellrelationen

1. Beweisen Sie die Relation $(\frac{\partial S}{\partial V})_T = (\frac{\partial P}{\partial T})_V$. (1 Punkt)
2. Berechnen Sie $(\frac{\partial S}{\partial V})_T$ für ein ideales Gas. (1 Punkt)

2.6 Zustandsänderung im idealen Gas

Einem Mol eines idealen Gases mit Isentropenkoeffizient $\gamma = 1.40$ und einer Ausgangstemperatur von $\theta_1 = 27\text{C}$ wird isobar eine Wärme von 8.31 Wh zugeführt.

1. Wie groß ist die Endtemperatur T_2 ? (1 Punkt)
2. Wie groß ist die vom Gas bei der Erwärmung abgegebene Arbeit? (1 Punkt)
3. Wie groß ist die relative Volumenänderung V_2/V_1 ? (1 Punkt)
4. Wie groß ist die Änderung der Energie und der Energiedichte des Gases? (1 Punkt)

2.6 Entropieänderung beim Mischen

Zwei nach außen abgeschlossene Räume mit Volumen $V_1 = 120 \text{ cm}^3$, $V_2 = 43 \text{ cm}^3$ seien durch eine isolierende Wand getrennt und mit jeweils 3 mol eines idealen Gases mit der Wärmekapazität $c_{V,1} = 12.4 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$, $c_{V,2} = 20.8 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ bei der jeweiligen Temperatur $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_2 = 900 \text{ K}$ gefüllt. Nach dem Entfernen der Trennwand durchmischen sich die Gase.

1. Berechnen Sie die Entropieänderung des Gesamtsystems durch das Mischen. (3 Punkte)
2. Geben die Entropieänderung für den Fall $c_{V,1} = c_{V,2}$, $T_1 = T_2$, $V_1 = V_2$ an. (1 Punkt)

Hinweis: Betrachten Sie reversible Ersatzprozesse für Teilschritte der Durchmischung nach dem Schema

$$(V_i, T_i) \xrightarrow{I} (V'_i, T'_i) \xrightarrow{II} (V''_i, T''_i)$$

für beide Gase separat. Verwenden Sie z.B. einen isochoren Prozess (I) zum Temperatenausgleich und einen isothermen Prozess (II) zur Expansion. Warum ergibt sich bei einer solchen Betrachtung die gleiche Entropieänderung wie beim tatsächlichen Durchmischungsprozeß?