Universität Regensburg Wintersemester 07-08

Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter Dr. Andrea Donarini

Blatt 11

1. Streuung an einer harten Kugel

Wir betrachten den Streuprozess eines Teilchens mit Masse m und Wellenvektor $\vec{k}$ an dem radialsymmetrischen Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} 0 : r > R \\ \infty : r < R \end{cases} .$$

Wie in der Vorlesung besprochen wurde, gilt für die Streuwellenfunktion

$$\psi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} f(\theta)$$

für große r. Dabei bezeichnen θ den Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{k}$, sowie $f(\theta)$ die Streuamplitude, welche durch

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\sin\delta_l \mathrm{e}^{i\delta_l}$$

gegeben ist ($P_l(\theta)$ ist das l-te Legendre-Polynom).

a) • Zeigen Sie, dass bei obigem Potential für die Streuphase δ_l gilt:

$$\tan\delta_l = \frac{j_l(kR)}{\eta_l(kR)}$$

Dabei bezeichnen j_l und η_l die sphärische Bessel- und Neumannfunktion, welche die Radialgleichung

$$w''(x) + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) w(x) = 0$$

mit $w(x) = xj_l(x)$ bzw. $w(x) = x\eta_l(x)$ erfüllen und durch das asymptotische Verhalten

$$j_l(x) \simeq \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \eta_l(x) \simeq -\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)$$

für große x gekennzeichnet sind. (3 Punkte)

b) • Für den totalen Streuquerschnitt gilt $\sigma = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l$, wobei

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

den Partialwellenstreuquerschnitt zur Drehimpulsquantenzahl l bezeichnet. Berechnen Sie den s-Wellen-Streuquerschnitt σ_0. Sie können δ_0 dabei durch die exake Lösung der Radialgleichung für $l = 0$ bestimmen. (2 Punkte)

c) In einer groben Näherung kann man $j_l(x) = 0$ und $\eta_l(x) = \infty$ für $x < l$ setzen, und für $x > l$ das oben angegebene asymptotische Verhalten verwenden. Berechnen Sie mit dieser Näherung den totalen Streuquerschnitt σ für ein hochenergetisches Teilchen mit $kR \gg 1$.

Ergebnis zur Kontrolle: $\sigma = 2\pi R^2$

d) Der klassische differentielle Streuquerschnitt ist durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta} \right|$$

gegeben. Dabei bezeichnet $b(\theta)$ den Stoßparameter (d.h den transversalen Abstand zur direkten Einfallrichtung auf das Streuzentrum), den das Teilchen haben muss, um unter dem Winkel θ gestreut zu werden. Berechnen Sie den totalen klassischen Streuquerschnitt und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem quantenmechanischen Streuquerschnitt aus Teilaufgabe c).

2. Streuung am Schalenpotential

• Bestimmen Sie den s-Wellen-Streuquerschnitt für ein Teilchen mit Masse m und Wellenzahl k, das am Potential $V(\vec{r}) = V_0 \delta(|\vec{r}| - R)$ gestreut wird. Welcher s-Wellen-Streuquerschnitt ergibt sich im Grenzfall $k \to 0$? (3 Punkte)

Frohes Schaffen!