Universität Regensburg Wintersemester 07-08

Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter Dr. Andrea Donarini

Blatt 6

1. Aharonov-Bohm-Effekt

a) • Die Bewegung eines Teilchens mit Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + e\Phi(\vec{r},t)\right]\psi(\vec{r},t)$$

beschrieben, wobei $\Phi(\vec{r},t)$ und $\vec{A}(\vec{r},t)$ das Skalar- bzw. Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes bezeichnen. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\tilde{\psi}(\vec{r},t) = \exp(i\lambda(\vec{r},t))\psi(\vec{r},t)$ bei geeigneter Wahl von $\lambda(\vec{r},t)$ die Schrödinger-Gleichung zu den Potentialen

$$\tilde{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)\,, \qquad \tilde{\Phi}(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t)$$

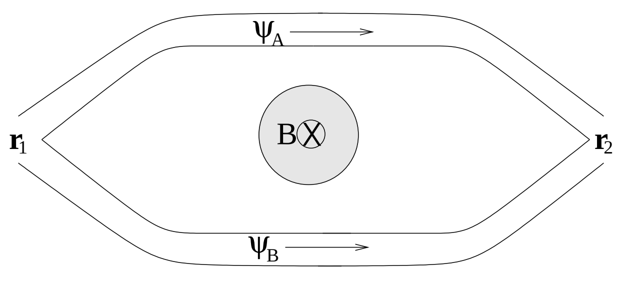
erfüllt, die sich aus einer Eichtransformation mit einem Skalarfeld $\chi(\vec{r},t)$ ergeben, und bestimmen Sie $\lambda(\vec{r},t)$. (3 Punkte)

b) • Bestimmen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe a) die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A}(\vec{r}))^2\psi(\vec{r},t)$$

in Anwesenheit eines zeitunabhängigen Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$, bei dem das zugehörige Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ verschwindet. (3 Punkte)

c) Betrachten Sie nun die Propagation des Teilchens durch zwei symmetrische Wellenleiter, zwischen denen sich, senkrecht dazu orientiert, eine unendlich lange stromdurchflossene Spule mit Magnetfeld B und Querschnittsfläche S befindet:



Wie groß ist am Ort $\vec{r}_2$ der Phasenunterschied zwischen den beiden, die Propagation durch die Wellenleiter beschreibenden Komponenten ψ_A und ψ_B, wenn $\psi_A = \psi_B$ am Ort $\vec{r}_1$ gilt?

d) Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für das Doppelspaltexperiment, wenn sich zwischen den beiden Spalten eine solche Spule befindet?

2. Rabi-Oszillationen

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, das sich in dem magnetischen Feld

$$\vec{B}(t) = B_0 \hat{e}_z + B_1 \cos(\omega t)\hat{e}_x + B_1 \sin(\omega t)\hat{e}_y$$

befindet, wobei $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ die Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten sind. Die Amplituden des magnetischens Feldes erfüllen die Bedingung $B_1 \ll B_0$.

a) • Das konstante magnetische Feld in Richtung $\hat{e}_z$ verursacht eine Zeeman-Aufspaltung des Wasserstoffatoms. Insbesondere kann man für die $1s$ Orbitale behaupten:

$$\Delta E = E_{1s\uparrow} - E_{1s\downarrow}\,,$$

wo $\uparrow$ und $\downarrow$ beide Spin-Zustände des Elektrons darstellen. Schreiben Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für die elektronischen $1s$-Zustände eines Wasserstoffatoms im zeitabhängigen magnetischen Feld $\vec{B}(t)$ wie oben beschrieben. Stellen Sie die Gleichung im Wechselwirkungsbild auf, wobei das zeitabhängige magnetische Feld als eine Störung betrachtet. (3 Punkte)

b) Angenommen, die Frequenz des oszillierenden magnetischen Feldes ist nahezu mit der Zeeman-Energie resonant,

$$\hbar\omega = \Delta E + \delta\omega\,.$$

Wenden Sie die "rotating wave approximation" auf die im Abschnitt a) berechneten Gleichungen an.

c) Bestimmen Sie die Systemsdynamik unter der Annahme, dass das Wasserstoffatom bei $t = 0$ im Zustand $1s\downarrow$ zu finden ist. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit das Elektron im Zustand $1s\downarrow$ bzw. $1s\uparrow$ als Funktion der Zeit zu finden.

Frohes Schaffen!

Abgabe der Hausaufgaben (markiert durch •) bis Montag 26.11. um 10 Uhr.