Universität Regensburg Wintersemester 07-08

Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter Dr. Andrea Donarini

Blatt 5

1. Kohärente Zustände im harmonischen Oszillator

Wir bezeichnen mit $\phi_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) die normierte Eigenfunktion des n-ten angeregten Zustands im eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω. Für eine komplexe Zahl α wird durch

$$\psi_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \phi_n(x)$$

ein *kohärenter Zustand* definiert.

a) Zeigen Sie: $\psi_\alpha = D(\alpha)\psi_0(x)$ mit dem Operator $D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$. Dabei bezeichnen $a^\dagger$ und a die Auf- und Absteigeoperatoren des harmonischen Oszillators, definiert durch

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad \text{bzw.} \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Glauber-Formel

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

für zwei Operatoren A und B, die mit ihrem Kommutator vertauschen.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe a):

$$\psi_\alpha(x) = \exp\left(-i\frac{p_\alpha x_\alpha}{2\hbar}\right) \exp\left(i\frac{p_\alpha x}{\hbar}\right) \phi_0(x - x_\alpha)$$

mit $x_\alpha := \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}(\alpha)$ und $p_\alpha := \sqrt{2\hbar m\omega}\,\mathrm{Im}(\alpha)$. Drücken Sie dazu den Exponenten $\alpha a^\dagger - \alpha^* a$ von $D(\alpha)$ in Abhängigkeit von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ aus und verwenden Sie die Glauber-Formel.

c) • Zum Anfangzeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion im harmonischen Oszillator durch den kohärenten Zustand $\psi_{\alpha_0}(x)$ gegeben. Zeigen Sie

$$\psi(x,t) = \psi_{\alpha(t)}(x) \exp\left(-i\frac{\omega t}{2}\right) \qquad \text{mit} \quad \alpha(t) = \alpha_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}.$$

(2 Punkte)

d) • Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der harmonische Oszillator durch ein instantan angeschaltetes Störpotential $V = F\hat{x}\theta(t)$ modifiziert ($\theta(t)$ bezeichnet die Stufenfunktion). Das Teilchen befinde sich anfangs im Grundzustand des ungestörten harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\psi(x,t)$ und skizzieren Sie $|\psi(x,t)|^2$ für $\omega t = 0,\ \pi/2$ und π. (4 Punkte)

2. Spontaner Zerfall im Wasserstoffatom

• Die Rate für den spontanen Zerfall des Zustandes $|\psi_i\rangle$ in den Zustand $|\psi_f\rangle$ ist durch

$$\Gamma_{if} = \frac{\alpha\omega_{if}^3}{2\pi c^2} \int \mathrm{d}\Omega_k \sum_{j=1}^{2} |\langle\psi_f|\, \vec{e}_j(\vec{k}) \cdot \vec{r}\, |\psi_i\rangle|^2$$

gegeben. Dabei bezeichnen α die Feinstrukturkonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und ω_{if} die Übergangsfrequenz von $|\psi_i\rangle$ nach $|\psi_f\rangle$. $\vec{e_1}(\vec{k})$ und $\vec{e_2}(\vec{k})$ sind die Einheitsvektoren der beiden möglichen Polarisationsrichtungen eines Photons mit Wellenvektor $\vec{k}$. Integriert wird über sämtliche Raumwinkel Ω_k von $\vec{k}$. Berechnen Sie die Zerfallsrate des ersten angeregten p-Zustands ($n = 2$, $l = 1$ und $m = 0$) im Wasserstoffatom. (3 Punkte)

Frohes Schaffen!

Abgabe der Hausaufgaben (markiert durch $\bullet$) bis Montag 19.11. um 10 Uhr.