Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter Dr. Andrea Donarini

Blatt 4

1. Zustandsdichte

Unter der Zustandsdichte $g(E)$ bei der Energie E versteht man die Zahl der Eigenzustände mit Energien im Intervall $[E - \frac{1}{2}\Delta E, E + \frac{1}{2}\Delta E]$ dividiert durch die Intervallbreite ΔE. Letztere wird dabei klein gewählt gegenüber der Energieskala, auf der $g(E)$ merklich variiert, muss aber groß im Vergleich zum mittleren Abstand benachbarter Energieniveaus sein. Semiklassisch lässt sich die Zustandsdichte über die Thomas-Fermi-Formel

$$g(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int\int \delta(E - H(\vec{p}, \vec{q}))\, d^n p\, d^n q$$

berechnen. Dabei bezeichnet $H(\vec{p}, \vec{q})$ die zum Hamiltonoperator H zugehörige klassische Hamiltonfunktion in einem System mit n Freiheitsgraden. Die Thomas-Fermi-Formel besagt im wesentlichen, dass es pro Planck-Zelle mit Volumen $(2\pi\hbar)^n$ im Mittel genau einen Quantenzustand gibt.

a) • Berechnen Sie die semiklassische Zustandsdichte für ein Teilchen mit Masse m im n-dimensionalen Kastenpotential mit Kantenlänge L

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

für $n = 1$, 2 und 3. Skizzieren Sie jeweils $g(E)$ als Funktion von E. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für $n = 3$ und $H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$ gilt:

$$g(E) = \frac{m}{2\pi^2\hbar^3} \int d^3r \sqrt{2m(E - V(\vec{r}))}\, \Theta(E - V(\vec{r}))\,.$$

Dabei bezeichnet $\Theta(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x < 0 \end{cases}$ die Stufenfunktion.

c) Berechnen Sie die Zustandsdichte für ein Teilchen mit Masse m im isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit Frequenz ω.

2. Zeitabhängige Störungstheorie

Das Wasserstoffatom werde einem ultrakurzem Laserpuls ausgesetzt, der durch ein zeitabhängiges elektrisches Feld der Form

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \exp(-t^2/\tau^2)$$

mit $\hbar\omega = 10$ eV, $|\vec{E}_0| = 10^6$ V/cm und $\tau = 10^{-14}$ s beschrieben wird.

a) • Berechnen Sie mit zeitabhängiger Störungstheorie in erster Ordnung die Wahrscheinlichkeit, das Atom nach Abschluss des Pulses im $2p$ Niveau vorzufinden, wenn es vor dem Puls im Grundzustand war. (5 Punkte)

b) Was passiert, falls das Wasserstoffatom einem monochromatischen Feld der Frequenz ω ausgesetzt wird? *Hinweis*: Analysieren Sie den Limes $\tau \to \infty$

Abgabe der Hausaufgaben (markiert durch •) bis Montag 12.11. um 10 Uhr.