UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Fisica

FISICA DELLE NANOSTRUTTURE A DOPPIO STRATO

Relatore: Chiar.mo Prof. Ruggero FERRARI
Correlatore: Dott. Luca MOLINARI

Tesi di Laurea di:
Andrea DONARINI
matricola: 546727
codice PACS: 73.50

Anno Accademico 1999-2000

Indice

1 Introduzione **3**

1.1 Importanza dei sistemi a doppio strato 3

1.2 Apparato teorico 5

1.3 Apparato sperimentale 7

2 Formalismo di Boltzmann **9**

2.1 Soluzione dell'equzione di Boltzmann 9

2.1.1 Solo termine di smorzamento: 10

2.1.2 Campo elettrico con smorzamento: 12

2.1.3 Campo magnetico con smorzamento: 13

2.1.4 Campo elettrico e magnetico con smorzamento: 14

2.2 Resistività di drag: deduzione semiclassica 18

2.2.1 Definizioni 18

2.2.2 $\boldsymbol{B} = 0$ 18

2.2.3 $\boldsymbol{B} \neq 0$ 28

2.3 Potenziale efficace di interazione 32

2.3.1 Screening di Thomas-Fermi 32

2.3.2 Potenziale efficace e resistività di drag 34

2.3.3 Spessore infinitesimo 36

2.3.4 Spessore finito 42

2.4 Suscettività bidimensionale 47

3 Formalismo di Kubo **50**

3.1 Resistività di drag:
deduzione quantistica con $\boldsymbol{B} = 0$ 50

3.1.1 Le funzioni triangolari 51

3.1.2 Scattering su impurezze: calcolo della self-energia 57
3.1.3 Scattering su impurezze: correzioni di vertice 65
3.1.4 Limite di Boltzmann 67
3.2 Resistività di drag:
deduzione quantistica con $\boldsymbol{B} \neq 0$ 78
3.2.1 Funzione triangolare e livelli di Landau 78
3.2.2 Scattering su impurezze: self-energia e correzioni di vertice . 83
3.2.3 Dalle funzioni triangolari alle suscettività 86
3.3 Potenziale efficace di interazione in RPA 97

4 Conclusioni **104**
4.1 Dipendenza dalla temperatura 104
4.2 Dipendenza dal campo magnetico 107
4.3 Drag negativo: un tentativo di spiegazione 108

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Importanza dei sistemi a doppio strato

Sembra esserci un ponte fra il mondo macroscopico descritto egregiamente dal sistema di leggi chiamato fisica classica e il mondo microscopico interpretato dalle leggi della meccanica quantistica: si tratta dei sistemi nanostrutturati. Da quando la tecnica ha permesso la realizzazione di strutture che avessero dimensioni caratteristiche dell'ordine del nanometro si è aperto un nuovo campo di ricerca: la fisica mesoscopica. Uno dei primi e forse più affascinanti effetti scoperti e studiati in tale ambito è l'effetto Hall quantistico (QHE) [1],[2].

Un campo magnetico ortogonale ad un sistema bidimensionale infinito di elettroni liberi è in grado di quantizzarne i livelli energetici [2] producendo una serie di livelli equidistanziati invece del continuo delle particelle libere. Se il sistema, pur non essendo infinito, ha dimensioni grandi rispetto al supporto della funzione d'onda che rappresenta l'elettrone, la degenerazione di tali livelli (detti di Landau) è grandissima ed è nota la relazione che la lega il campo magnetico:

$$g = \frac{BL_xL_y}{\Phi_0} \tag{1.1}$$

dove

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e} \tag{1.2}$$

Disponendo gli elettroni sui vari livelli in accordo con il principio di esclusione di Pauli si ottiene che, a partire da quello energeticamente più favorito, solo un

certo numero di livelli di Landau sarà occupato. La variazione dell'intensità del campo magnetico varia la degenerazione dei livelli e quindi il numero totale di livelli occupati (detto numero di occupazione). Proprio il numero di occupazione ha permesso di catalogare all'interno del QHE l'effetto Hall quantistico intero e quello frazionario. Il problema si faceva più complesso.

Varie teorie sono state proposte per descrivere la fisica del problema; per cercare di testarle si è incominciato a pensare ad un modo per sondare i fenomeni presenti all'interno di un sistema bidimensionale di elettroni usando qualcosa che avvesse in sostanza la medesima "sensibilità" e quindi le medesime dimensioni. La tecnica lo permette e quindi si utilizzano i sistemi a doppio strato (o bi-layer). Si tratta di due piani di elettroni posti a distanza nanometrica con contatti separati in modo da poter ad esempio far passare corrente in uno dei due strati prelevando la tensione sull'altro [3].

È in questo modo che si scopre il Coulomb Drag ossia il trascinamento di elettroni dovuto all'interazione di Coulomb [3]. Il fenomeno si rivela nell'insorgere di una tensione su un layer quando si fa scorrere corrente nell'altro. Il trasferimento di momento da elettroni di un layer a quelli sull'altro costituisce il meccanismo basilare attraverso cui il drag insorge (si vedano [4],[5] per la prima esposizione teorica). In un layer gli elettroni scorrono in regime di corrente stazionaria. Trasferendo momento ad altri elettroni sul layer vicino sollecitano in quest'ultimo un movimento di carica. Il secondo layer è però un circuito aperto: un accumulo di carica negativa ad un estremo farà insorgere un campo elettrico equilibratore e quindi ad una differenza di potenziale fra i due bordi opposti. La resistività di drag (ossia il rapporto fra la tensione in un layer e la corrente nell'altro) misurata è dell'ordine dell'Ohm. La corrente iniettata è invece dell'ordine del μA.

Oggetto della mia tesi è lo studio teorico del Coulomb drag in assenza e in presenza di campo magnetico utilizzando sia un formalismo semiclassico sia uno puramente quantistico. Vengono riassunti ed elaborati risultati presenti in letteratura estendendone ove opportuno l'ambito di applicazione, cercando inoltre di trovare indizi per una risposta al quesito proposto da un fenomeno (il cosiddetto drag negativo) ancora incompreso nell'ambito della fenomenologia del Coulomb drag [6].

Esistono anche apparati più complessi detti multilayer con i quali altre proprietà del sistema di base o anche nuovi fenomeni mesoscopici legati alla strut-

tura complessiva potranno essere scoperti. Anche il semplice gas di elettroni bidimensionale lascia ancora molti punti interrogativi.

1.2 Apparato teorico

I sistemi bidimensionali di elettroni, componenti fondamentali delle strutture che prendiamo in considerazione nel nostro studio, sono composti da un numero di elettroni che si aggira attorno ai $10^7 - 10^9$. Trovandoci in presenza di un enorme numero di gradi di libertà, tratteremo il sistema con le tecniche della meccanica statistica.

Dal punto di vista classico ciascuno dei due layer viene descritto con una funzione di distribuzione [7]: essendo operativamente impossibile conoscere lo stato di tutte le particelle che compongono il sistema ci si accontenta di definire la frazione di esse che occupa una determinata porzione dello spazio delle fasi. La conoscenza di questa funzione consente di calcolare proprietà medie del sistema e di ricavare leggi statistiche. Se è impossibile seguire la dinamica dei singoli elettroni (anche a prescindere dalla indeterminazione quantistica) è però esprimibile la legge che governa la dinamica della loro funzione di distribuzione. Tale legge, detta equazione del trasporto di Boltzmann, costituisce il punto di partenza della nostra analisi [8]. In primo luogo deduciamo la soluzione dell'equazione di Boltzmann in approssimazione di tempo di rilassamento (RTA) [9]. In particolare mettiamo in evidenza che per calcolare la soluzione stazionaria in RTA di un sistema uniforme di Fermioni è sufficiente conoscere la soluzione del moto classica e il principio di esclusione di Pauli. Alla forza collisionale si fa corrispondere nell'equazione del moto un temine di smorzamento proporzionale all'inverso del tempo di rilassamento e si calcola la soluzione stazionaria: la soluzione dell' equazione di Boltzmann (almeno nel limite di piccola perturbazione) è la distribuzione di Fermi-Dirac centrata però sul momento d'equilibrio classico.

Nota la soluzione per layer isolati si imposta il sistema di equazioni di Boltzmann accoppiate che descrive la dinamica del doppio strato. Le caratteristiche fondamentali del sistema complessivo in regime stazionario permettono di "indovinare" la soluzione di tale sistema che, tuttavia, non costitisce la vera incognita del problema. Nostro obiettivo è la determinazione della resistività di drag ossia (ricordandosi che il sistema è bidimensionale) il rapporto fra la tensione in un layer e

la corrente nell'altro. Si risolve la dinamica del layer in cui scorre la corrente come se l'altro non ci fosse (le correzioni sarebbero di ordine superiore nell'interazione tra i layer) mentre per l'altro, nel quale non può scorrere corrente perchè il circuito è sostanzialmente aperto, si impone la soluzione d'equilibrio.

Il risultato interessante [13] è una equazione del trasporto per il sottosistema all'equilibrio che presenta nel termine di forza il campo elettrico equilibratore mentre nel termine collisionale il campo elettrico che sostiene la corrente nell'altro layer. Si può già intravedere la relazione lineare fra la corrente in un layer e la tensione nell'altro che permette di calcolare la resistività di drag. Sviluppando l'equazione si perviene all'espressione esplicita. In essa vi sono due elementi fondamentali: il potenziale di interazione e la suscettività generalizzata.

In prima approssimazione il potenziale che si potrebbe considerare è quello coulombiano, ma importanti correzioni vengono introdotte dallo schermaggio trattato secondo lo schema di Thomas-Fermi [14]. Il problema viene analizzato in dettaglio costruendo la soluzione esplicita sia per layer di spessore infinitesimo che finito. La suscettività generalizzata viene calcolata esplicitamente e se ne fornisce l'espressione analitica della componente immaginaria (parte rilevante nella trattazione della risposta lineare) a temperatura nulla suggerendone la struttura a temperatura diversa da zero.

A livello classico si dà una soluzione anche del caso con campo magnetico diverso da zero. Se ne evidenziano i forti limiti: la discretizzazione dei livelli energetici inevitabilmente presente può essere trascurata solamente se le energie termiche in gioco eccedono fortemente la spaziatura tra i livelli di Landau.

Dal punto di vista quantistico si utilizza il formalismo delle matrici-densità applicato nel contesto della seconda quantizzazione [11]. Si descrive il doppio strato come un sistema di elettroni indipendenti perturbato da una interazione coulombiana. La hamiltoniana è composta di una parte di singola particella (particella libera e potenziale esterno generato dalle impurezze) e una di interazione a due corpi (interazione coulombiana). Il grado di libertà relativo ai due layer si introduce come pseudospin e l'assenza di tunneling fra i layer viene letta come la conservazione di tale grandezza. Se si agisce su un sistema all'equilibrio termodinamico con una debole perturbazione e si considera la risposta lineare a tale perturbazione si ottiene la cosiddetta formula di Kubo [10],[14]. Se la grandezza di cui si analizza la risposta lineare è la corrente, la formula di Kubo fornisce una espressione della

conducibilità del sistema.

Si considera lo sviluppo fino all'ordine perturbativo dominante nell'interazione coulombiana (il secondo nel limite di corrente continua) della conducibilità. Cellula fondamentale del calcolo è il correlatore corrente-densità-densità che per la sua rappresentazione diagrammatica, viene anche detto funzione triangolare [15],[16]. La presenza di impurezze che fisicamente introducono dissipazione garantendo la stazionarietà del sistema, contrariamente al caso classico dove veniva sostanzialmente compendiata in una costante di rilassamento temporale, trova un posto nella trattazione microscopica. Le impurezze sono rappresentate da un potenziale esterno somma di tanti potenziali centrali localizzati in modo casuale sugli ipotetici centri di scattering la cui posizione non è nota a priori. Da questo potenziale centrale dipendono la self-energia che veste le tre funzioni di Green che compongono le funzioni triangolari e anche le correzioni di vertice.

Il secondo ordine perturbativo e l'approssimazione di elettroni indipendenti sono superati attraverso la sostituzione delle due linee di interazione coulombiana che legano le due funzioni triangolari tramite un potenziale efficace calcolato in random phase approximation. E' interessante notare che entro certi limiti tale potenziale coincide con il potenziale classico ottenuto attraverso una equazione di Poisson autoconsistente. Esistono anche altri modi per sviluppare la formula di Kubo attraverso ad esempio la memory-function [17],[18] ma che conducono poi alla medesima formula per la resistività. Con metodi analoghi, anche se complicati dalla presenza dei livelli di Landau, si è calcolata la conducibilità di drag (e quindi la resistività) anche in presenza di forti campi magnetici [19].

1.3 Apparato sperimentale

Le nanostrutture a doppio strato sono sottili deposizioni alternate di semiconduttori diversi[2]. La banda di conduzione dell'eterostruttura così formata presenta dei pozzi in corrispondenza dello strato di semiconduttore con la banda di conduzione più bassa. In queste buche di potenziale gli elettroni rimangono confinati costituendo dei sistemi bidimensionali. I semiconduttori utilizzati possono essere ad esempio GaAs e AlGaAs. Gli spessori degli strati di semiconduttore hanno dimensioni dell'ordine della decina di nanometri: in un esperimento tipico[6] con un sistema a doppio strato i due quantum well hanno la dimensione di $20nm$ e

sono posti ad una distanza di $22.5nm$. Le dimensioni laterali caratteristiche delle diverse deposizioni sono invece dell'ordine del millimetro. Per questo motivo gli elettroni confinati nelle eterostrutture sono piani di elettroni e lo spessore di questi piani è trascurabile. La distanza fra i due piani di elettroni che costituiscono una nanostruttura a doppio strato è calibrata in modo tale che sia confrontabile con la distanza media degli elettroni in ciascuno strato. La densità elettronica si aggira attorno ai $10^9 - 10^{11}\,cm^{-2}$. Gli elettroni confinati su questi piani hanno inoltre una forte mobilità $2.5 \times 10^6 cm^2/Vs$ e li rende assimilabili al modello di gas di elettroni libero bidimensionale. Le temperature alle quali vengono condotti gli esperimenti sono dell'ordine del Kelvin. Dalla la bassa densità di elettroni si evince che tali temperature sono tuttavia confrontabili con la temperatura di Fermi del sistema. La tecnica permette di dotare gli strati di contatti con i quali iniettare corrente o prelevere tensione indipendentemente su ciascun layer. Molti fenomeni legati al trasporto di elettroni possono essere studiati utilizzando delle strutture descritte, in particolare il tunneling fra i layer, l'effetto Hall quantistico oppure il Coulomb drag.

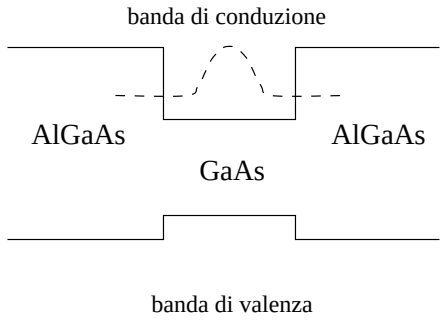


Figura 1.1: *Rappresentazione di un pozzo quantico realizzato con una eterostruttura: in ascissa viè la direzione di deposizione degli strati, in ordinata c'è l'energia di banda. Ho indicato con una linea tratteggiata la prima funzione d'onda del pozzo.*

Capitolo 2

Formalismo di Boltzmann

2.1 Soluzione dell'equazione di Boltzmann: moto classico e principio di Pauli

L'equazione di Boltzmann per un sistema di particelle ha la forma[1]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla}_r + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_p\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \tag{2.1}$$

Calcolare la soluzione dell'equazione di Boltzmann per un dato sistema fisico può essere un compito molto gravoso. Introducendo alcune approssimazioni si può tuttavia ottenere con poca fatica se non la soluzione dell'equazione differenziale a tutti i tempi almeno un certo numero di informazioni. In primo luogo è utile dare una forma precisa e semplice al temine collisionale: adotteremo la approssimazione di tempo di rilassamento (RTA).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{f - f_0}{\tau} \tag{2.2}$$

dove τ è il cosiddetto tempo di rilassamento. Il senso dell'identificazione della approssimazione con la particolare forma del termine collisionale si ottiene scrivendo l'equazione di un sistema uniforme e in assenza di campi di forze esterne. In RTA la funzione di distribuzione si rilasserà su quella di equilibrio esponenzialmente

[1] Per la deduzione vedi ad esemipo [8]

con un tempo caratteristico pari esattamente a τ. In realtà la nostra attenzione sarà rivolta sempre a sistemi non solamente uniformi ma anche stazionari: in tali condizioni scompaiono dal membro di sinistra la derivata temporale e il gradiente spaziale, semplificando ulteriormente l'equazione.

Per calcolare la soluzione stazionaria in RTA di un sistema uniforme di Fermioni è sufficiente conoscere la soluzione del moto classica e il principio di esclusione di Pauli. Se infatti alla forza collisionale si fa corrispondere nell'equazione del moto un termine di smorzamento di peso $1/\tau$, si verifica che la soluzione stazionaria dell' equazione di Boltzmann sarà la distribuzione di Fermi-Dirac centrata sul momento[2] d'equilibrio.

Nell'ipotesi che la funzione di distribuzione sia uniforme nelle posizioni e che il termine collisionale si possa esprimere in RTA, l'equazione di Boltzmann ha l'aspetto:

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_k f = -\frac{f - f_0}{\tau}. \tag{2.3}$$

La presente sezione sarà dedicata allo studio di questa equazione differenziale e della sua soluzione diretta e tramite equazione del moto classica. Analizzeremo le varie situazioni con diversi campi di forze.

2.1.1 Solo termine di smorzamento:

L'equazione di Boltzmann ha una forma semplicissima:

$$0 = -\frac{f - f_0}{\tau} \tag{2.4}$$

e la soluzione è evidentemente $f(k) = f_0(k)$.

L'equazione classica per il moto di una particella sotto l'azione di una semplice forza frenante si scrive, per i momenti:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\tau} \tag{2.5}$$

[2]Si intende per "momento" l'espressione $\frac{m\dot{x}}{\hbar}$. Alcuni autori [2] chiamano questa quantità momento meccanico per distinguerlo dal momento canonico. Non essendoci ambiguità non faremo distinzioni continuando per brevità a chiamare semplicemente momento il momento meccanico

e ammette come soluzione all'equilibrio, ossia praticamente dopo alcune unità temporali τ, la quiete della particella. Volendo rappresentare quindi l'andamento di una distribuzione classica di particelle nello spazio dei momenti osserveremmo una progressiva contrazione della "nube" iniziale sull'origine e questo indipendentemente dall'insieme delle condizioni iniziali delle singole particelle. È la traduzione del fatto che l'unica forza presente è dissipativa e quindi (se le particelle sono sufficientemente diluite da poter trascurare qualsiasi interazione fra di loro) l'energia del sistema (puramente cinetica) tende a zero nel tempo.

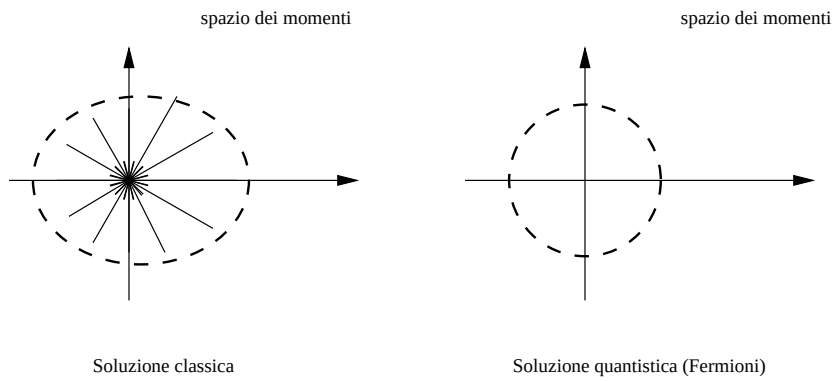


Figura 2.1: *Soluzione classica e quantistica a confronto: il principio si esclusione di Pauli "sostiene" la bolla quantistica*

Nella figura 2.1 si può già vedere la differenza con la soluzione quantistica (per Fermioni) del problema: il principio di esclusione di Pauli impedisce agli elettroni di collassare sulla soluzione nulla e l'effetto complessivo sarà quello della formazione di una bolla di elettroni di raggio k_F centrata nell'origine dello spazio dei momenti. Il supporto della distribuzione sarà quello descritto solamente alla temperatura assoluta $T = 0\ K$. A temperatura finita infatti la distribuzione di Fermi-Dirac ha la ben nota espressione:

$$f_0(\boldsymbol{k}) = \frac{2}{1 + \exp[+\beta(\epsilon_k - \mu)]} \tag{2.6}$$

dove μ è il potenziale chimico e il coefficiente due a numeratore è stato scritto con riferimento ad elettroni.

2.1.2 Campo elettrico con smorzamento:

Veniamo ora al caso in cui gli elettroni siano soggetti alla forza derivata da un campo elettrico uniforme. L'equazione di Boltzmann assume allora la forma:

$$q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f = -\frac{f - f_0}{\tau} \tag{2.7}$$

È necessaria un'ulteriore semplificazione dell'equazione: si considerano semplicemente effetti lineari nel campo elettrico. Nel termine di sinistra si può sostituire alla distribuzione incognita quella all'equilibrio e arrivare così alla soluzione:

$$f(\boldsymbol{k}) = f_0(\boldsymbol{k}) - q\tau\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0(\boldsymbol{k}) \tag{2.8}$$

Classicamente l'equazione di moto del generico elettrone si arricchisce della forza derivante dal campo elettrico e ha quindi la forma:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{k}}{\tau} \tag{2.9}$$

Sempre dopo alcune unità temporali τ, la soluzione si stabilizza in $\boldsymbol{k} = q\tau\boldsymbol{E}$ indipendentemente dalle condizioni iniziali. Ancora una volta possiamo rappresentare con un disegno la progressiva tendenza all'equilibrio della particella:

Nuovamente dal disegno (figura 2.2) si possono ricavare ulteriori informazioni: sia nel caso classico sia in quello quantistico i sistemi di riferimento sono doppi e uno traslato rispetto all'altro, precisamente di $q\tau\boldsymbol{E}$. Nei sistemi di riferimento traslati (quelli primati per intenderci) le figure coincidono con quelle del punto precedente. Matematicamente si può riprodurre la medesima situazione attraverso una trasformazione di Galilei: $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} - q\tau\boldsymbol{E}$. In questa nuova variabile l'equazione ritorna ad essere quella del caso 1. Quelle argomentazioni conducono quindi alla conclusione del problema e consentono di affermare:

$$f'(\boldsymbol{k}') = f_0(\boldsymbol{k}') \tag{2.10}$$

ossia:

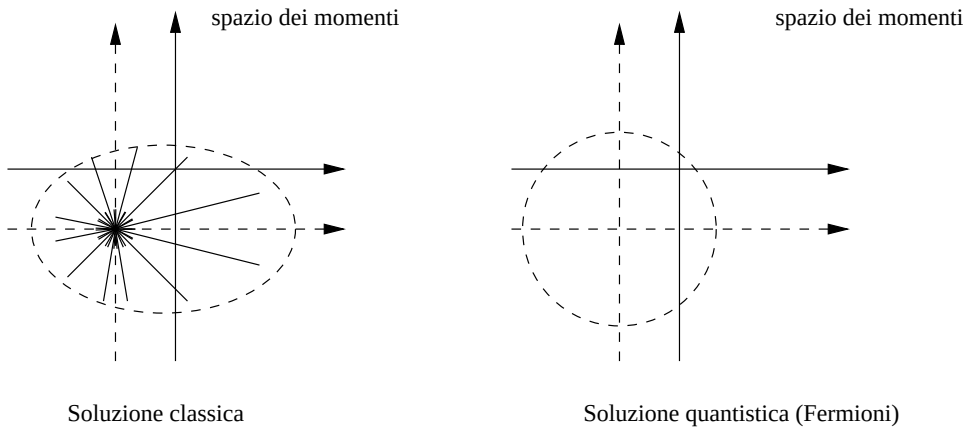


Figura 2.2: *Si noti che a meno di una traslazione degli assi di riferimento questa figura è identica alla precedente.*

$$f(\boldsymbol{k}) = f_0(\boldsymbol{k} - q\tau\boldsymbol{E}) \tag{2.11}$$

e, considerando che è soltanto una piccola perturbazione, infine:

$$f(\boldsymbol{k}) = f_0(\boldsymbol{k}) - q\tau\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0(\boldsymbol{k}) \tag{2.12}$$

2.1.3 Campo magnetico con smorzamento:

Il campo magnetico entra nella equazione di Boltzmann nel termine di forza. In formula:

$$\frac{q}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f = -\frac{f - f_0}{\tau} \tag{2.13}$$

La distribuzione all'equilibrio di Fermi-Dirac è una soluzione di questa equazione differenziale, almeno nel limite in cui l'energia dell'elettrone che vi compare sia quadratica nei momenti. Infatti in tal caso, come si può facilmente verificare, il gradiente sui momenti della distribuzione risulta essere parallelo al momento stesso.

L'equazione classica per i momenti si scrive:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}) - \frac{\boldsymbol{k}}{\tau}. \tag{2.14}$$

L'unità temporale continua a governare l'equilibrio. Dopo alcuni τ (rigorosamente parlando nel limite $t \to \infty$) il sistema sarà stazionario e dunque la derivata temporale nel termine di sinistra dell'equazione si annullerà. L'equazione differenziale si trasforma in quella algebrica:

$$\boldsymbol{k} - \gamma(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{2.15}$$

dove per brevità si è indicato con γ il rapporto $q\tau/mc$.Facendo uso del tensore di Levi-Civita si può riscrivere matricialmente l'equazione e ottenere:

$$(\delta_{ij} - \gamma\epsilon_{ijk}B_k)k_j = 0 \tag{2.16}$$

Tale equazione ammette solamente soluzione banale perchè l'operatore lineare in parentesi tonda è invertibile avendo determinante non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\gamma B_3 & \gamma B_2 \\ \gamma B_3 & 1 & -\gamma B_1 \\ -\gamma B_2 & \gamma B_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \gamma^2(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2). \tag{2.17}$$

Ma allora si riutilizza il fatto che se la soluzione classica è un collasso nell'origine, quella quantistica fermionica può essere soltanto la Fermi-Dirac d'equilibrio.

2.1.4 Campo elettrico e magnetico con smorzamento:

Nel caso in cui il campo elettrico e magnetico siano entranbi accesi l'equazione di Boltzmann prende la forma:

$$\left[q\boldsymbol{E} + \frac{q}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B})\right] \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f = -\frac{f - f_0}{\tau} \tag{2.18}$$

Sottolineo che il campo elettrico è piccolo, mentre per il campo magnetico vi è la sola limitazione $\hbar\omega_c << k_B T$ che permette di rimanere in approssimazione

semiclassica. In quest'ultimo caso non è evidente la soluzione. Si può tuttavia formulare l'ipotesi che essa abbia la forma:

$$f = f_0 - q\tau \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \tag{2.19}$$

dove $\boldsymbol{G}$ rappresenta l'incognita del nostro problema. Implicitamente sto richiedendo che $\boldsymbol{G}$ sia piccolo (lineare in $\boldsymbol{E}$) e indipendente da $\boldsymbol{k}$. Inserendo questa posizione nell'equazione sopra si ottiene, trascurando i termini non-lineari in $\boldsymbol{E}$, un'equazione algebrica per $\boldsymbol{G}$:

$$\begin{aligned}
\left[q\boldsymbol{E} + \frac{q}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B})\right] \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \left[q\boldsymbol{E} + \frac{q}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B})\right] \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} q\tau(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0) &= q\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \\
q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \frac{q}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} q\tau(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0) &= q\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \\
q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \frac{q}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \left(q\tau \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon)\right) &= q\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \\
q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \frac{q^2\tau}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}) \cdot \left[\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right)(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon) + \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon)\right] &= q\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \\
\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \frac{q\tau}{mc}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}) \cdot \left[\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon)\right] &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \frac{q\tau}{mc} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon)) \cdot \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \\
\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \frac{q\tau}{mc} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}(\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}) \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon) \cdot \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \\
\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 - \frac{q\tau}{c}(\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}) \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0
\end{aligned}$$

Ho riportato molti passaggi affinché risultino evidenti le approssimazioni introdotte per giungere a:

$$\boldsymbol{E} - \frac{q\tau}{mc}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \tag{2.20}$$

Scritta in componenti questa equazione ha un aspetto familiare:

$$E_i = (\delta_{ij} - \gamma \epsilon_{ijk} B_k) G_j \tag{2.21}$$

L'operatore lineare in parentesi tonda è quello incontrato nella sezione precedente. Poiché ne conosciamo già il determinante e quindi l'invertibilità, possiamo affermare che esiste unica la soluzione del sistema sopra scritto in forma matriciale. Si deve dunque calcolare l'inversa della matrice:

$$(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij} = \frac{1}{1+\gamma^2|\boldsymbol{B}|^2}\left(\delta ij + \gamma\epsilon_{ijk}B_k + \gamma^2 B_i B_j\right) \tag{2.22}$$

che, applicata al vettore E_j , si può scrivere in notazione compatta:

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{E} + \gamma(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) + \gamma^2(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}}{1+\gamma^2|\boldsymbol{B}|^2} \tag{2.23}$$

Tutte le ipotesi fatte su $\boldsymbol{G}$ (che esistesse, che fosse lineare in $\boldsymbol{E}$, e infine che fosse indipendente da k) sono soddisfatte e la soluzione dell'equazione di Boltzmann può essere scritta:

$$f = f_0 - q\tau\frac{\boldsymbol{E} + \gamma(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) + \gamma^2(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}}{1+\gamma^2|\boldsymbol{B}|^2}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0 \tag{2.24}$$

L'equazione classica di moto in presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico -costanti e uniformi- e di una forza dissipativa si scrive, nei momenti:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{mc}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B})\right) - \frac{\boldsymbol{k}}{\tau} \tag{2.25}$$

La soluzione stazionaria per tempi lunghi è quella della ormai nota equazione algebrica:

$$q\tau\boldsymbol{E} = \boldsymbol{k} - \gamma(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}) \tag{2.26}$$

La soluzione si calcola facilmente da quella per $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{k}_\infty = q\tau\frac{\boldsymbol{E} + \gamma(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) + \gamma^2(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}}{1+\gamma^2|\boldsymbol{B}|^2} \tag{2.27}$$

Ancora una volta la soluzione classica viola il principio di Pauli. Dall'esperienza maturata ai punti due e tre sappiamo, tuttavia, che se si riuscisse con una trasformazione di Galilei ad eliminare il campo elettrico (totale: anche quello generato dal campo magnetico in un sistema di riferimento in moto rispetto ad esso), in quel sistema di riferimento la soluzione sarebbe la distribuzione di Fermi-Dirac, essendo allora la soluzione classica il collasso nell'origine. Poniamo $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}$: la forza risultante che agisce sulla particella nel nuovo sistema di riferimento è:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}' &= q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{mc}((\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{B}\right) - \frac{\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{q}}{\tau} = \\ &= q\left(\boldsymbol{E} - \frac{1}{mc}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{B}) + \frac{\boldsymbol{q}}{q\tau} + \frac{1}{mc}(\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{B})\right) - \frac{\boldsymbol{k}'}{\tau} = \\ &= q\left(\boldsymbol{E}' + \frac{1}{mc}(\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{B}')\right) - \frac{\boldsymbol{k}'}{\tau}\end{aligned} \tag{2.28}$$

Di conseguenza la condizione d'annullamento del campo elettrico $\boldsymbol{E}'$

$$\begin{aligned}0 = \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} - \frac{1}{mc}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{B}) + \frac{\boldsymbol{q}}{q\tau} \\ -q\tau\boldsymbol{E} &= -\frac{q\tau}{mc}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{q}\end{aligned} \tag{2.29}$$

è risolta dal momento $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{q} = -q\tau\frac{\boldsymbol{E} + \gamma(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \gamma^2(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}}{1 + \gamma^2|\boldsymbol{B}|^2} \tag{2.30}$$

Come si poteva intuire $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{k}_\infty$. Lo stesso risultato è stato raggiunto al punto 1.1 con il solo campo elettrico. Nel sistema primato la soluzione, come già detto, è la distribuzione di Fermi-Dirac quindi:

$$\begin{aligned}f'(\boldsymbol{k}') &= f_0(\boldsymbol{k}') \\ f(\boldsymbol{k}) &= f'(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}) = f_0(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q})\end{aligned} \tag{2.31}$$

ossia:

$$f(\boldsymbol{k}) = f_0(\boldsymbol{k}) - q\tau\frac{\boldsymbol{E} + \gamma(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \gamma^2(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}}{1 + \gamma^2|\boldsymbol{B}|^2} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_0(\boldsymbol{k}) \tag{2.32}$$

2.2 Resistività di drag: deduzione semiclassica

2.2.1 Definizioni

Ogni coppia di particelle cariche è soggetta ad una interazione coulombiana. Se consideriamo due piani paralleli nei quali possano muoversi liberamente degli elettroni, è naturale aspettarsi che tali elettroni risentano gli uni degli altri. In generale questo non avviene perchè la presenza di un mezzo scherma abbastanza l'interazione. Se però il doppio strato è separato da una distanza molto piccola (dell'ordine della decina di nanometri) allora l'interazione coulombiana può produrre effetti visibili interessanti. Uno di questi è il Coulomb drag. Si tratta di un effetto di trascinamento elettronico riscontrato in sistemi a doppio strato: in uno dei due layer (diciamo il 2) si fa scorrere una certa corrente mentre sull'altro layer si dispongono dei prelievi di tensione. Essendo la resistenza del voltmetro molto elevata la corrente non può fluire in quest'ultimo. Tuttavia vi è trasferimento di momento fra i layer. Per contrastare questa forza e permettere al sistema 1 di rimanere "all'equilibrio", insorge una differenza di potenziale misurabile. Il rapporto tra la tensione nel layer 1 e la corrente in 2 definisce la resistenza di drag. Per comodità si sfrutta infine il fatto che ciascuno strato è bidimensionale e quadrato concludendo che quella misurata è in realtà la resistività di drag.

$$\rho_D = \frac{V_1}{I_2} \tag{2.33}$$

L'equazione sopra scritta è il punto di contatto fra la teoria microscopica e l'esperimento. Il membro di sinistra viene calcolato mentre quello di destra si misura.

2.2.2 $\boldsymbol{B} = 0$

Nell'approccio di Boltzmann o semiclassico si rappresentano i due layer tramite due funzioni di distribuzione. Si può quindi scrivere il sistema di equazioni accoppiate che descrive la dinamica del sistema. Nella sua forma più generale tale sistema è di ardua soluzione e si tratterà di introdurre le approssimazioni che ne permettano una manipolazione più agevole senza privarlo di significato. Nella sua forma generale il sistema appare:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla}_r + \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{p_1}\right) f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{coll} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla}_r + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{p_2}\right) f_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_{coll} \end{cases} \tag{2.34}$$

A prima vista le due equazioni sembrerebbero disaccoppiate: il termine di accoppiamento è nascosto nella derivata temporale indicata con la notazione generica di collisionale.

Per tentare di risolvere il sistema assumo in primo luogo che le due distribuzioni elettroniche siano spazialmente uniformi. In questo modo i gradienti spaziali spariscono. Assumo inoltre che al primo ordine nel campo elettrico applicato il layer 2 non venga influenzato dal layer 1 e che quindi si possa risolvere in approssimazione di tempo di rilassamento (RTA). Questo comporta che il suo termine collisionale si scriva nella forma:

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{f_2 - f_2^0}{\tau_2} \tag{2.35}$$

Altra approssimazione importante è quella di regime stazionario che manda a zero tutte le derivate temporali. Considerando il fatto che la corrente nel layer 2 si intende mantenuta da un campo elettrico $\boldsymbol{E}_2$, il sistema prende la forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{k_1} f_1(\boldsymbol{k}_1) &= \left(\frac{\partial f_1(\boldsymbol{k}_1)}{\partial t}\right)_{coll} \\ e_2 \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{k_2} f_2(\boldsymbol{k}_2) &= -\frac{f_2(\boldsymbol{k}_2) - f_2^0(\boldsymbol{k}_2)}{\tau_2} \end{aligned} \tag{2.36}$$

La soluzione del layer 2 si trova facilmente scrivendo l'equazione del moto classica e ricordandosi del principio di Pauli: come già spiegato in dettaglio nella sezione dedicata alla soluzione dell'equazione di Boltzmann in RTA, essa è:

$$\begin{aligned} f_2(\boldsymbol{k}_2) =& f_2^0(\boldsymbol{k}_2) - e_2 \tau \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k_2}} f_2^0(\boldsymbol{k}_2) \\ =& f_2^0(\boldsymbol{k}_2 - e_2 \tau \boldsymbol{E}_2) \end{aligned} \tag{2.37}$$

dove la carica delle particelle è stata indicata con il simbolo e_2 per distinguerla dai portatori di carica del layer 1.

Nel layer 1 non passa corrente. La distribuzione elettronica è quella di Fermi-Dirac. L'equilibrio è però turbato dal trascinamento duvuto al layer 2: la immobilità si assume recuperata dal bilancio tra la forza di drag e la forza dovuta al campo elettrico $\boldsymbol{E}_1$ che insorge nel layer. La differenza di potenziale misurata con i prelievi di tensione entra nel calcolo proprio attraverso questo campo. In questo senso si parla di bilancio di forze e di campo elettrico equilibratore [13]. Tutte le perturbazioni dell'equilibrio dei due sistemi sono piccole e il sistema di equazioni si intende risolto in approssimazione lineare. Per scrivere il termine collisionale nell'equazione del layer 1 bisogna chiarire bene lo stato iniziale e finale. Un elettrone del layer 1 di momento $\boldsymbol{k}_1$ interagisce con un elettrone del layer 2 di momento $\boldsymbol{k}_2$ e si ottengono gli stati finali $\boldsymbol{k}_1'$ e $\boldsymbol{k}_2'$. Nel termine collisionale appare la probabilità che questo processo possa avvenire. Tale probabilità è composta di almeno due fattori: l'elemento di matrice tra lo stato iniziale e finale (direttamente dipendente dalla interazione in atto) e lo spazio delle fasi disponibile all'interazione compatibile con il principio di esclusione di Pauli. Ci occupiamo ora del secondo fattore compendiando il primo in una espressione più o meno generica $w(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2')$. La densità di probabilità che l'evento di scattering sopra descritto si verifichi è dunque:

$$\begin{aligned}\Pi(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; &\boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2') = \\ &= f_1(\boldsymbol{k}_1)\,(1 - f_1(\boldsymbol{k}_1'))\, f_2(\boldsymbol{k}_2)\,(1 - f_2(\boldsymbol{k}_2'))\, w(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2')\end{aligned} \tag{2.38}$$

L'interazione conserva energia e momento. Tenendo presente che la derivata temporale collisionale conta tutti gli eventi che portano un elettrone del layer 1 ad assumere momento $\boldsymbol{k}_1$ pesando tutte le possibili configurazioni iniziali se ne può ricostruire la forma:

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma_1', \sigma_2, \sigma_2'} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1'}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2'}{(2\pi)^2} \delta(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k}_2') \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1' - \epsilon_2') \\ [f_1(\boldsymbol{k}_1)\,(1 - f_1(\boldsymbol{k}_1'))\, f_2(\boldsymbol{k}_2)\,(1 - f_2(\boldsymbol{k}_2'))\, w(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2') \\ - f_1(\boldsymbol{k}_1')\,(1 - f_1(\boldsymbol{k}_1))\, f_2(\boldsymbol{k}_2')\,(1 - f_2(\boldsymbol{k}_2))\, w(\boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2'; \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)]\end{aligned} \tag{2.39}$$

Nell'integrando si riconoscono le due delta di conservazione di energia e momento, la probabilità di transizione nuda, il peso dovuto alle distribuzioni. Vi sono due addendi con segno opposto perchè lo scattering può portare un elettrone ad assumere momento $\boldsymbol{k}_1$ (unico grado di libertà non sommato) oppure allontanarlo. Poiché i gradi di libertà $\boldsymbol{k}_2$ e $\boldsymbol{k}_{2'}$ sono sommati è indifferente ai fini dell'integrale che la particella nel layer 2 entri nell'interazione con momento $\boldsymbol{k}_2$ o $\boldsymbol{k}_{2'}$: per questo motivo si devono omettere i termini in cui si scambiano lo stato iniziale e finale della particella nel layer 2. La caratteristica forma dei pesi distribuzionali $f(1-f)$ è dovuta al fatto che le particelle sono fermioni e quindi soddisfano al principio di esclusione di Pauli: la probabilità che lo stato finale sia libero è appunto $1-f$.

Ricordando che in RTA e nell'approssimazione di piccolo campo elettrico la soluzione dell'equazione di Boltzmann si presenta sempre come una Fermi-Dirac traslata di un opportuno momento, sviluppo le funzioni di distribuzione dei due layer in una parte di ordine zero più un contributo al primo ordine:

$$f_i(\boldsymbol{k}_i) = f_i^0(\boldsymbol{k}_i) + f_i^1(\boldsymbol{k}_i) \quad \text{con} \quad i = 1, 2 \tag{2.40}$$

Pur non conoscendo la soluzione posso già a priori specificare meglio la forma del contributo al primo ordine:

$$\begin{aligned} f_i^1(\boldsymbol{k_i}) =& \tilde{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f_i^0(\boldsymbol{k}) \\ =& -\beta \tilde{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \epsilon_{\boldsymbol{k}} f_i^0(\boldsymbol{k}_i) \left(1 - f_i^0(\boldsymbol{k}_i)\right) \\ =& \psi f_i^0(\boldsymbol{k}_i) \left(1 - f_i^0(\boldsymbol{k}_i)\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

dove $\tilde{\boldsymbol{k}}$ è l'opportuno vettore che si trova risolvendo l'equazione classica del moto (vedi sezione sulla soluzione dell'equazione di Boltzmann).

Si sostituisce l'espressione delle f: a priori ci si aspetta un contributo all'ordine zero, uno al primo ordine e un terzo al secondo ordine. Il contributo di ordine zero si annulla. Per dimostrarlo si sfrutta la simmetria di w per scambio delle variabili primate e non, la conservazione dell'energia e la forma esplicita della disribuzione di Fermi-Dirac:

$$\begin{aligned} & w(1,2;1',2') f_1^0 (1 - f_1'^0) f_2^0 (1 - f_2'^0 - w(1',2';1,2) f_1'^0 (1 - f_1^0) f_2'^0 (1 - f_2^0) = \\ & w(1,2;1',2') f_1^0 f_1'^0 f_2^0 f_2'^0 \exp(\beta(\epsilon_{1'} + \epsilon_{2'} - \mu_1 - \mu_2))(1 - \exp(\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_{1'} - \epsilon_{2'}))) \end{aligned} \tag{2.42}$$

dove si è utilizzata la notazione abbraviata $f_i^0(\boldsymbol{k}_i) \equiv f_i^0$ e $f_i^0(\boldsymbol{k}_i') \equiv f_i^{'0}$.

La conservazione dell'energia implica che l'ultima parentesi si annulli. I contributi al primo ordine si calcolano in modo analogo ma in questo caso non si ha cancellazione totale. Si ottiene una espressione lineare nelle ψ:

$$w(1,2;1',2')\,(\psi_1+\psi_2-\psi_1'-\psi_2')\,f_1^0 f_2^0(1-f_1^{'0})(1-f_2^{'0}) \tag{2.43}$$

trascurando le delta di consevazione.

Nelle due ψ si legge il livello di approssimazione con il quale tratto il sistema. Nel layer 1 non scorre corrente quindi assumo semplicemente che il bilancio della forza di drag e del campo elettrico equilibratore mantengano il layer all'equilibrio: condizione che si esprime nella nostra notazione con $\psi_1 = \psi_1' = 0$. La corrente nel layer 2 è invece imposta da un campo elettrico esterno applicato ($\boldsymbol{E}_2$) che per semplicità assumo diretto nella direzione x. A questo punto viene la assunzione più delicata e cioè che al primo ordine la corrente nel layer 2 sia determinata puramente dal campo elettrico esterno imposto e dalle impurezze interne, relegando ad ordini successivi gli effetti dell'interazione con l'altro layer. Allora, utilizzando la RTA per mediare l'effetto delle impurezze si può anche in questo caso dare l'espressione esplicita di ψ_2 e ψ_2':

$$\psi_2 = -\beta e_2 \tau_2 \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 \tag{2.44}$$

dove si è usata la legge di dipersione $\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2 k^2/2m^*$ con m^* massa efficace.

La prima equazione del sistema di Boltzmann iniziale ha ora la forma:

$$\begin{aligned} -e_1 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}_1} f_1 = \\ = \sum_{\sigma_1',\sigma_2,\sigma_2'} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1'}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2'}{(2\pi)^2} w(1,2;1',2') \\ \delta(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_1'-\epsilon_2')\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1'-\boldsymbol{k}_2') \\ \beta\tau_2 e_2 \boldsymbol{E}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2') f_1^0 f_2^0 (1-f_1^{'0})(1-f_2^{'0}) \end{aligned} \tag{2.45}$$

L'equazione evidenzia già la struttura fondamentale: il termine di sinistra è proporzionale al campo elettrico equilibratore mentre quello di destra è lineare nel

campo del layer trascinante. La proporzionalità diretta tra E_1 e E_2 è il riflesso della presenza di una resistività di drag.

È utile focalizzare l'attenzione sul momento trasferito da un layer all'altro in una interazione elettronica di Coulomb ed evidenziare tale variabile nella integrazione. A tale scopo moltiplico entrambi i membri dell'equazione per $\boldsymbol{k}_1$ e integro sui gradi di libertà corrispondenti del layer 1: $\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1$ e σ_1. Il membro di sinistra si risolve subito per parti e dà come risultato:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma_1} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2} \boldsymbol{k}_1 (-) e_1 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}_1} f_1^0 = \\
&= \sum_{\sigma_1} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2} e_1 \boldsymbol{E}_1 f_1^0 = \\
&= e_1 \boldsymbol{E}_1 n_1
\end{aligned} \tag{2.46}$$

dove n_1 è il numero di elettroni per unità di superficie nel layer 1.

Anche la derivata collisionale può essere notevolmente manipolata grazie all'operazione sopra descritta: in primo luogo si sfrutta la conservazione dei momenti nell'interazione:

$$\begin{aligned}
\psi_2 - \psi_2' &= -\beta \tau_2 e_2 \boldsymbol{E}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2') \\
&= -\beta \tau_2 e_2 \boldsymbol{E}_2 \cdot \frac{1}{m^*} (\boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Compare quindi nell'integranda il fattore $\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdot (\boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k}_1)$. La simmetria dei domini di integrazione in $\boldsymbol{k}_1$e$\boldsymbol{k}_1'$ e della parte restante dell'integranda tra variabili primate e non, consente di procedere alla sostituzione:

$$\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdot (\boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k}_1) \to -\frac{1}{2} (\boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k}_1) \boldsymbol{E}_2 \cdot (\boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k}_1) \tag{2.48}$$

e quindi riportare tutto al momento trasferito. In particolare si assume che l'elemento di matrice $w(1, 2; 1', 2')$ dipenda dal solo modulo del momento trasferito. Allora, se chiamo $\boldsymbol{q}$ tale momento, mi trovo a valutare l'integrale:

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\boldsymbol{q} w(q) \boldsymbol{q} \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{q} \\
=&\int \mathrm{d}q_x \mathrm{d}q_y w(q) \hat{\boldsymbol{x}}(q_x E_{2x} q_x + q_x E_{2y} q_y) + \hat{\boldsymbol{y}}(q_y E_{2x} q_x + q_y E_{2y} q_y) \\
=&\int \mathrm{d}q_x \mathrm{d}q_y w(q) \hat{\boldsymbol{x}} q_x E_{2x} q_x + \hat{\boldsymbol{y}} q_y E_{2y} q_y \\
=&\frac{1}{2} \int \mathrm{d}q_x \mathrm{d}q_y w(q) \hat{\boldsymbol{x}} E_{2x} q^2 \\
=&\frac{1}{2} \boldsymbol{E}_2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q} w(q) q^2
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

si ricorda che $\boldsymbol{E}_2 = E_{2x}\hat{\boldsymbol{x}}$.

Ho verificato innanzi tutto che il campo elettrico equilibratore $\boldsymbol{E}_1$ è parallelo al campo elettrico $\boldsymbol{E}_2$ che sostiene la corrente nel layer 2 (il driver). Per semplificare ulteriormente l'espressione della derivata collisionale introduco una nuova funzione che svolgerà un ruolo centrale in tutte le deduzioni della conducibilità di drag: la suscettività bidimensionale. Una sezione di questo capitolo è dedicata proprio ad una valutazione esplicita di tale funzione.

La suscettività bidimensionale è definita, almeno nel limite semiclassico, nel modo seguente:

$$
\chi(\omega, q) = -\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{f^0(\epsilon_1) - f^0(\epsilon_1')}{\epsilon_1 - \epsilon_1' + \omega + i\delta} \qquad \text{dove} \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k}_1 \tag{2.50}
$$

Per far apparire nella nostra formula le suscettività bidimensionali si sfruttano le seguenti identità:

$$
\begin{aligned}
\delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1' - \epsilon_2') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \delta(\epsilon_1 - \epsilon_1' - \omega) \delta(\epsilon_2 - \epsilon_2' + \omega) \\
f^0(\epsilon)\left(1 - f^0(\epsilon + \omega)\right) &= \frac{f^0(\epsilon) - f^0(\epsilon - \omega)}{1 - \exp(-\beta\omega)}
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Utilizzandole nel membro di destra dell'equazione 2.45 si possono ottenere due fattori del tipo:

$$
\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_i}{(2\pi)^2} \delta(\epsilon_i - \epsilon_i' \pm \omega) \frac{f^0(\epsilon_i) - f^0(\epsilon_i - \omega)}{1 \mp \exp(-\beta\omega)} \tag{2.52}
$$

dove i diversi segni si riferiscono ai casi $i = 1, 2$. È lecito isolare questi fattori perchè $w(1, 2; 1', 2') = w(q, \omega)$ e, dei tre momenti rimasti da integrare dopo aver riassorbito la delta di conservazione, uno si trasla ottenendo l'integrazione sul momento trasferito e due rimangono liberi. A questo punto introduco le identità di Sochockji:

$$\frac{1}{x \pm i\delta} = \wp\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x) \tag{2.53}$$

e ottengo rispettivamente:

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2}\delta(\epsilon_1 - \epsilon_1' - \omega)\frac{f^0(\epsilon_1) - f^0(\epsilon_1 - \omega)}{1 + \exp(-\beta\omega)} = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2\pi\exp(-\frac{\beta\omega}{2})}\Im\left(\frac{f^0(\epsilon_1) - f^0(\epsilon_1')}{\epsilon_1 - \epsilon_1' - \omega - i\delta}\right)\left(\mathrm{Sh}^{-1}(\frac{\beta\omega}{2})\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^2}\delta(\epsilon_2 - \epsilon_2' + \omega)\frac{f^0(\epsilon_2) - f^0(\epsilon_2 - \omega)}{1 - \exp(-\beta\omega)} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2\pi\exp(\frac{\beta\omega}{2})}\Im\left(\frac{f^0(\epsilon_2) - f^0(\epsilon_2')}{\epsilon_2 - \epsilon_2' - \omega - i\delta}\right)\left(\mathrm{Sh}^{-1}(\frac{\beta\omega}{2})\right)$$

In sostanza quindi:

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma_1}\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2}\boldsymbol{k}_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{coll} = \\ &-\frac{e_2\beta\tau_2}{8\pi^2 m^*}\sum_{\sigma}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\Im\chi_1(q,\omega)\Im\chi_2(q,\omega)w(1,2;1',2')\frac{q^2}{\mathrm{Sh}^2(\frac{\omega\beta}{2})}\end{aligned} \tag{2.54}$$

Infine esplicito l'elemento di matrice $w(1, 2; 1', 2')$: utilizzando la regola d'oro di Fermi posso riconnetterlo alla trasformata di Fourier del potenziale di interazione calcolata nel momento trasferito. Questo è il punto in cui entra l'interazione coulombiana. In realtà non si tratta di una interazione coulombiana pura a causa degli effetti di screening presenti in un sistema di molti elettroni in cui vi siano fluttuazioni di carica netta locale. Lo screeening rende conto anche del fatto che il Coulomb drag non si osserva se i due layer giacciono a distanze macroscopiche. La

forza Coulombiana è una forza a lungo range, non così la forza efficace che agisce tenendo conto della schermatura.

$$w(1,2;1',2') = 8\pi(e_1e_2)^2|U(q)|^2 \tag{2.55}$$

Al fine di evidenziare maggiormente il contributo delle cariche nella resistività di drag si è scelta la convenzione di isolare nel potenziale il contributo delle cariche. U rappresenta l'interazione privata delle costanti di accoppiamento. Il potenziale coulombiano di due cariche interagenti è con questa convenzione semplicemente $1/r$ indipendentemente dalle cariche. Naturalmente le particolari cariche ricompaiono nel caso in cui si voglia scrivere l'energia del sistema.

Nella derivata collisionale compare infine il campo elettrico $\boldsymbol{E}_2$ che mantiene la corrente nel layer 2. Al fine di rendere più evidente la forma della resistività di drag è utile riconnettere tale campo alla densità di corrente che genera. Si utilizzerà a tale scopo la formula per la conducibilità di Drude.

$$\boldsymbol{j} = \frac{n\tau e^2}{m^*}\boldsymbol{E} \tag{2.56}$$

Non deve stupire che si utilizzi una formula di così brutale semplicità perchè il layer 2 si intende risolto al primo ordine in modo indipendente. L'unica fonte di dissipazione sono le impurezze compendiate in un tempo di rilassamento. La soluzione stazionaria dell'equazione di Boltzmann in RTA fornirebbe il medesimo risultato [9]. Radunando tutte le argomentazioni esposte sulla prima delle due equazioni di Boltzmann accoppiate che rappresentano il nostro problema si può finalmente esprimere il legame di dipendenza lineare che esiste tra la corrente che fluisce nel layer 2 e il campo elettrico equilibratore che insorge nel layer 1 per contrastare le forze di trascinamento:

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{e_1e_2}{n_1n_2}\frac{\beta}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}q \int_0^\infty \mathrm{d}\omega q^3|U(q)|^2 \frac{\Im\chi_1(q,\omega)\Im\chi_2(q,\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\frac{\beta\omega}{2})}\boldsymbol{j}_2 \tag{2.57}$$

Nella resistività di drag appena dedotta si vedono già le componenti fondamentali che caratterizzeranno anche i risultati più complessi ottenuti in presenza

di campo magnetico e nella trattazione più strettamente quantistica. In particolare tra i fattori moltiplicativi le cariche dei portatori prese con il loro segno: il drag cambia segno se i portatori hanno cariche di segno opposto rispetto alla situazione con cariche concordi. Nell'integrando sono stati raggruppati due fattori distinti: uno legato al potenziale e quindi anche allo screening ($U(q)$ è un potenziale efficace – vedi avanti) l'altro più direttamente legato allo spazio delle fasi disponibile all'evento di scattering fra portatori di carica di un layer e dell'altro. Mentre il primo è sostanzialmente indipemdente dalla temperatura, il secondo ne è fortemente dipendente. Nell'ultimo capitolo verrà analizzato in dettaglio il ruolo giocato da questi due fattori nell'interpretazione della dipendenza dalla temperatura della resistività di drag.

2.2.3 $\boldsymbol{B} \neq 0$

Si vuole dare una espressione della conducibilità di drag misurata in un sistema a doppio strato di dimensioni nanometriche inserito in un campo magnetico ortogonale. L'intensità di tale campo è limitata dalla temperatura: è noto che una particella carica inserita in un campo magnetico uniforme presenta uno spettro dell'energia quantizzato secondo i livelli di Landau. Tuttavia se la spaziatura di tali livelli è piccola rispetto all'energia termica media, la trattazione quantistica si riconduce ancora a quella semiclassica. Come nel caso precedente il layer 2 è il driver. Si impone quindi un campo elettrico esterno $\boldsymbol{E}_2$, questo porta il layer fuori dall'equilibrio. Nel layer 1, in conseguenza della forza di drag, si ha ugualmente la tendenza ad allontanarsi dall'equilibrio, tendenza che comunque si ritiene bilanciata dall'insorgere di un campo equilibratore $\boldsymbol{E}_1$. Si assume sia che il layer 1 sia in equilibrio, sia che il layer 2 sia risolto in modo indipendente, cioè, richiamandoci alla sezione dedicata alla soluzione dell' equazione di Boltzmann:

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{k}_1) =& f_1^0(\boldsymbol{k}_1) \\ f_2(\boldsymbol{k}_2) =& f_2^0(\boldsymbol{k}_2) + \beta e_2 \tau_2 \frac{\boldsymbol{E}_2 + \gamma(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B})}{1+\gamma^2|\boldsymbol{B}|^2} \cdot \boldsymbol{v}_2 f_2^0(\boldsymbol{k}_2)\left(1 - f_2^0(\boldsymbol{k}_2)\right) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Con una notazione coerente con la sezione precedente si può dire che:

$$\begin{aligned} \psi_1 =& \psi_1' = 0 \\ \psi_2 =& -e_2\tau\beta \frac{\boldsymbol{E}_2 + \gamma(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B})}{1+\gamma^2|\boldsymbol{B}|^2} \cdot \boldsymbol{v}_2 \\ \psi_2' =& -e_2\tau\beta \frac{\boldsymbol{E}_2 + \gamma(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B})}{1+\gamma^2|\boldsymbol{B}|^2} \cdot \boldsymbol{v}_2' \end{aligned} \tag{2.59}$$

Ma allora l'equazione di Boltzmann del layer 1 che serve per determinare il campo elettrico $\boldsymbol{E}_1$ e quindi la conducibilità di drag, prende la forma:

$$\begin{aligned} &\left[e_1\boldsymbol{E}_1 + \frac{e_1}{m_1 c}(\boldsymbol{k}_1 \times \boldsymbol{B})\right] \cdot \boldsymbol{\nabla}_{k_1} f_1^0(\boldsymbol{k}_1) = \\ &= -\sum_{\sigma_1',\sigma_2,\sigma_2'} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1'}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2'}{(2\pi)^2}\delta(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_1'-\epsilon_2')(\psi_2-\psi_2') \\ &\quad f_1^0(\boldsymbol{k}_1)\left(1-f_1^0(\boldsymbol{k}_1')\right) f_2^0(\boldsymbol{k}_2)\left(1-f_2^0(\boldsymbol{k}_2')\right) w(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{k}_1',\boldsymbol{k}_2') \end{aligned} \tag{2.60}$$

Infatti la particolare forma delle ψ non influenza il processo di linearizzazione.

Per come è strutturata la distribuzione di equilibrio il termine proporzionale al campo magnetico nel membro di sinistra si annulla. È utile a questo punto introdurre la forma esplicita per le ψ:

$$\begin{aligned} & e_1 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{k_1} f_1^0(\boldsymbol{k}_1) = \\ & = \sum_{\sigma_1', \sigma_2, \sigma_2'} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1'}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2'}{(2\pi)^2} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1' - \epsilon_2') w(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2') \beta e_2 \tau_2 \\ & \quad \frac{\boldsymbol{E}_2 + \gamma(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B})}{1 + \gamma^2 |\boldsymbol{B}|^2} \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2') f_1^0(\boldsymbol{k}_1) \left(1 - f_1^0(\boldsymbol{k}_1')\right) f_2^0(\boldsymbol{k}_2) \left(1 - f_2^0(\boldsymbol{k}_2')\right) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Moltiplicando a destra e sinistra per $\boldsymbol{k}_1$ e sommando poi sui gradi di libertà relativi $\boldsymbol{k}_1 \sigma_1$, si ottiene, integrando per parti il membro di sinistra:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma_1} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2} \boldsymbol{k}_1 e_1 \left[\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_{k_1} f_1^0(\boldsymbol{k}_1)\right] = -\boldsymbol{E}_1 \sum_{\sigma_1} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2} e_1 \left[f_1^0(\boldsymbol{k}_1)\right] = \\ & = - \boldsymbol{E}_1 e_1 n_1 \end{aligned} \tag{2.62}$$

il membro di destra

$$\begin{aligned} & = \sum_{\sigma_i} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1'}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2'}{(2\pi)^2} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1' - \epsilon_2') w(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2') \beta e_2 \tau_2 \\ & \quad \boldsymbol{k}_1 \left[\frac{\boldsymbol{E}_2 + \gamma(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B})}{1 + \gamma^2 |\boldsymbol{B}|^2} \cdot (\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1)\right] f_1^0(\boldsymbol{k}_1) \left(1 - f_1^0(\boldsymbol{k}_1')\right) f_2^0(\boldsymbol{k}_2) \left(1 - f_2^0(\boldsymbol{k}_2')\right) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Sfruttando la conservazione dei momenti e la simmetria delle variabili primate e non, sostituisco $\boldsymbol{k_1 U} \cdot (\boldsymbol{v_1'} - \boldsymbol{v_1}) \to -\frac{1}{2m}(\boldsymbol{k_1'} - \boldsymbol{k_1})\boldsymbol{U} \cdot (\boldsymbol{k_1'} - \boldsymbol{k_1})$. Posso riscrivere il secondo membro nella forma più simmetrica:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m} \sum_{\sigma_i} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1'}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^2} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1' - \epsilon_2') w(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2') \beta e_2 \tau_2 \\ & \qquad (\boldsymbol{k_1'} - \boldsymbol{k_1}) \left[\frac{\boldsymbol{E}_2 + \gamma(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B})}{1 + \gamma^2 |\boldsymbol{B}|^2} \cdot (\boldsymbol{k}_1' - \boldsymbol{k}_1)\right] \\ & \qquad f_1^0(\boldsymbol{k}_1) \left(1 - f_1^0(\boldsymbol{k}_1')\right) f_2^0(\boldsymbol{k}_2) \left(1 - f_2^0(\boldsymbol{k}_2')\right) \end{aligned} \tag{2.64}$$

Attraverso la consueta rappresentazione della delta di conservazione dell'energia:

$$\delta(\epsilon_1 - \epsilon_1' + \epsilon_2 - \epsilon_2') = \int \mathrm{d}\omega\ \delta(\epsilon_1 - \epsilon_1' - \omega)\delta(\epsilon_2 - \epsilon_2' + \omega) \tag{2.65}$$

posso eseguire anche gli integrali in $\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1$ e $\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2$ facendo comparire ancora una volta le le suscettività bidimensionali:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{E_1} e_1 n_1 = &- \frac{e_2 \tau \beta}{8\pi^2 m_2} \sum_{\sigma_i} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2} \mathrm{d}\omega w(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2') \\ &\boldsymbol{q} \left[\frac{\boldsymbol{E}_2 + \gamma(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B})}{1 + \gamma^2 |\boldsymbol{B}|^2} \cdot \boldsymbol{q} \right] \frac{\Im\chi_1(q,\omega)\Im\chi_2(q,\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\frac{\beta\omega}{2})} \end{aligned} \tag{2.66}$$

A questo punto non resta che evidenziare la struttura matriciale che moltiplica $\boldsymbol{E}_2$, dare alla matrice di scattering la forma data dalla regola d'oro di Fermi e semplificare le somme sugli spin ricordando che l'interazione coulombiana è indipendente da questi gradi di libertà.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 = &\frac{\tau \beta e_2}{4\pi^2 m_2 e_1 n_1} \frac{1}{1 + \gamma^2 |\boldsymbol{B}|^2} (1 + \gamma \boldsymbol{\epsilon}^{(3)} B) \boldsymbol{E}_2 \times \\ &\times \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2} \mathrm{d}\omega 2\pi (e_1 e_2)^2 |U(q)|^2 q^2 \frac{\Im\chi_1(q,\omega)\Im\chi_2(q,\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\frac{\beta\omega}{2})} \end{aligned} \tag{2.67}$$

Si utilizza infine la definizione di resistività di drag $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{\rho}_D \boldsymbol{j}_2$ e si elimina dall'equazione la componente ortogonale ai layer. È utile ricordare che tra il modulo della corrente (j_2) e quello del campo esterno (E_2) vale comunque la relazione $j_2 = \frac{e_2^2 n_2 \tau_2}{m} E_2$: il campo magnetico genera un resistenza Hall ma non influisce sulla parte diagonale della conducibilità . Quindi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 = &\frac{1}{n_1 n_2} \frac{e_2}{e_1} (e_1 e_2)^2 \frac{\beta}{4\pi^2 e_2^2} \frac{1}{1 + (\tau_2 \omega_c 2)^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \mathrm{d}q \mathrm{d}\omega |U(q)|^2 q^3 \frac{\Im\chi_1(q,\omega)\Im\chi_2(q,\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\frac{\beta\omega}{2})} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -(\tau\omega_c)_2 \\ (\tau\omega_c)_2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{j}_2 \end{aligned} \tag{2.68}$$

ossia semplificando, si può affermare che la resistività di drag si scrive:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_D =& \frac{e_1 e_2}{n_1 n_2} \frac{1}{1+(\tau_2\omega_c 2)^2} \times \\ &\times \frac{\beta}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}q \mathrm{d}\omega |U(q)|^2 q^3 \frac{\Im\chi_1(q,\omega)\Im\chi_2(q,\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\frac{\beta\omega}{2})} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -(\tau\omega_c)_2 \\ (\tau\omega_c)_2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.69}$$

ove si sono anche sostituiti i coefficienti γ con le più comuni frequenze di ciclotrone. La frequenza di ciclotrone del layer 1 e anche il suo tempo di rilassamento caratteristico non compaiono nella formula della resistività : questa asimmetria fra i due strati è dovuta alla condizione di equilibrio imposta al layer 1, ben diversa dalla condizione di stazionarietà del layer 2. Nel layer 1 non può esserci effetto Hall poichè per definizione non vi è corrente, e non ha efficacia la costante di smorzamento in quanto il sistema è in equilibrio.

2.3 Potenziale efficace di interazione

2.3.1 Screening di Thomas-Fermi

L'interazione che permette la trasmissione di momento da un layer all'altro viene genericamente chiamata di Coulomb. In effetti la presenza contemporanea delle altre cariche nei layer produce degli effetti di schermaggio. Questo permette di giustificare il rapido scomparire del Coulomb drag all'aumentare della distanza tra i layer. Un'interazione a lungo range come quella coulombiana non renderebbe ragione un simile comportamento. Inoltre il potenziale efficace di interazione ha un ruolo fondamentale nella modulazione del segnale di resistenza di drag in campo magnetico [19], [22], [23]. Si possono mediare gli effetti delle altre cariche in gioco introducendo un potenziale efficace tra i due elettroni che si scambiano momento durante l'interazione.

La situazione semplificata di una densità di carica di impurezza fissa schermata da un mare di elettroni liberi permette di chiarire le idee [14]. Si consideri un sistema costituito da un background positivo fisso e da un mare di elettroni liberi in modo che sia globalmente e anche localmente neutro. Se si introduce una carica di impurezza fissa in un punto è naturale che le cariche libere (elettroni) si ridistribuiscano in modo da minimizzare l'energia del sistema. Questo processo viene detto screening. Analizzo il problema elettrostatico utilizzando l'equazione di Poisson.

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 V(\boldsymbol{r}) = -4\pi e[\rho_i(\boldsymbol{r}) + \rho_s(\boldsymbol{r})] \tag{2.70}$$

dove $-e$ è la carica dell'elettrone, V è l'energia potenziale di una carica $-e$ posta in $\boldsymbol{r}$, ρ_i e ρ_s sono rispettivamente la densità di carica di impurezza e di schermo. Nell'equazione si considera fissata la densità di carica di impurezza mentre si cerca una soluzione autoconsistente per la densità di carica di screening. Per evidenziare il fatto che sto cercando una perturbazione su una distribuzione uniforme di carica riscrivo la carica di schermo:

$$\rho_s(\boldsymbol{r}) = -e[n(\boldsymbol{r}) - n_0] \tag{2.71}$$

La densità uniforme n_0 viene perturbata e raggiunge un nuovo equilibrio nella densità variabile $n(\boldsymbol{r})$. La soluzione viene ricercata nel limite di piccola perturbazione.

Una risoluzione autoconsistente del problema implica che si riesca a rendere chiusa l'equazione di Poisson. La densità di impurezze è un parametro noto del problema. Bisogna ricondurre la densità di schermo al potenziale o viceversa. Un modo per ricondurre la densità di schermo all'energia potenziale passa attraverso l'introduzione di una lunghezza d'onda locale di Fermi. Si considera la distribuzione come disomogenea ma localmente in equilibrio. La lunghezza d'onda locale di Fermi risulta in sostanza definita dalla relazione con la densità variabile $n(\boldsymbol{r})$. Tale rapporto è costruito in analogia con quello tra la lunghezza d'onda di Fermi di un sistema all'equilibrio (globale) e la rispettiva densità (uniforme) di elettroni.

$$k_F(\boldsymbol{r}): \quad n(\boldsymbol{r}) = \frac{k_F^3(\boldsymbol{r})}{3\pi^2} \tag{2.72}$$

ma il potenziale chimico è una proprietà globale del sistema e quindi:

$$\frac{k_F^2(\boldsymbol{r})}{2m} = E_F(\boldsymbol{r}) = E_F - V(\boldsymbol{r}) \tag{2.73}$$

dove

$$E_F = \frac{(3\pi^2 n_0)^{2/3}}{2m} \tag{2.74}$$

Utilizzando tutte le informazioni raccolte si può manipolare l'equazione di Poisson originaria (2.70)ed ottenere una equazione chiusa nel potenziale:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}^2 V(\boldsymbol{r}) =& 4\pi e \left\{\rho_i(\boldsymbol{r}) - e[n(\boldsymbol{r}) - n_0]\right\} = \\
=& 4\pi e \left\{\rho_i(\boldsymbol{r}) + e n_0 \left[1 - \frac{k_F^3(\boldsymbol{r})}{k_F^3}\right]\right\} \\
=& 4\pi e \left\{\rho_i(\boldsymbol{r}) + e n_0 \left[1 - \left(1 - \frac{V(\boldsymbol{r})}{E_F}\right)^{3/2}\right]\right\} \\
=& 4\pi e \left\{\rho_i(\boldsymbol{r}) + e n_0 \frac{3V(\boldsymbol{r})}{2E_F}\right\} \\
=& 4\pi e \rho_i(\boldsymbol{r}) + \frac{6\pi e^2 n_0}{E_F} V(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{2.75}$$

La costante che moltiplica il potenziale si può riscrivere meglio in termini del momento di Fermi:

$$\frac{6\pi e^2 n_0}{E_F} = \frac{4me^2}{\pi} k_F \tag{2.76}$$

Si è fatta l'ipotesi che la perturbazione nell'energia locale introdotta dal potenziale sia piccola rispetto all'energia di Fermi del sistema. Tale ipotesi è perfettamente consistente con quella originaria che la perturbazione della densità sia piccola rispetto alla densità elettronica uniforme imperturbata. Introducendo il numero d'onda di Thomas-Fermi (la cui definizione risulta a questo punto molto naturale) l'equazione di Poisson diviene semplicissima:

$$q_{TF} = \left(\frac{4me^2}{\pi} k_F\right)^{1/2} \tag{2.77}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}^2 - q_{TF}^2) V(\boldsymbol{r}) = 4\pi e \rho_i(\boldsymbol{r}). \tag{2.78}$$

da cui si ricava subito la soluzione formale:

$$V(\boldsymbol{r}) = -4\pi e \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3} \frac{\rho_i(\boldsymbol{q})}{q^2 + q_{TF}^2} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.79}$$

Nel caso in cui l'impurezza sia una carica puntiforme $\mathcal{Q}_i$ posta nell'origine il potenziale ha una forma particolarmente semplice:

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{e\mathcal{Q}_i}{r} \exp(-q_{TF} r) \tag{2.80}$$

Il potenziale risulta quindi non banale solamante in una regione limitata attorno al punto in cui è localizzata l'impurezza. Ad una distanza paragonabile all'inverso del numero d'onda di TF (ossia a qualche lunghezza d'onda di Thomas-Fermi) l'effetto perturbativo dell'impurezza risulta in sostanza totalmente schermato.

2.3.2 Potenziale efficace e resistività di drag

Uno dei fattori che concorrono al calcolo della resistività di drag è la probabilità di scattering tra gli stati iniziali e finali di due elettroni che interagiscono l'uno con l'altro. Più propriamente:

$$\sum_{spin} w(1,2;1',2') = 4 \cdot 2\pi (e_1 e_2)^2 |U(q)|^2 \tag{2.81}$$

Si è fatto uso della regola d'oro di Fermi che esprime l'elemento di matrice come il quadrato del modulo dell'energia potenziale e del fatto che l'interazione è spin indipendente (il 4 in evidenza). $U(q)$ è dunque la trasformata di Fourier del potenziale di interazione efficace privato delle cariche calcolata nel momento trasferito. Una trattazione più rigorosa si può ottenere specificando meglio i termini: ho due elettroni entranti nell'interazione e due uscenti. I rispettivi vettori d'onda si scrivono in seconda quantizzazione:

$$\begin{aligned}
&|1\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}z_1 e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}\ \chi_1(z_1)\ \psi^\dagger(\boldsymbol{r},z_1)|0\rangle \\
&\underbrace{|2\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}z_2 e^{i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}\ \chi_2(z_2)\ \psi^\dagger(\boldsymbol{r},z_2)|0\rangle}_{\Downarrow} \\
&\overbrace{|1'\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}z_1 e^{i\boldsymbol{k}_{1'}\cdot\boldsymbol{r}}\chi_1(z_1)\psi^\dagger(\boldsymbol{r},z_1)|0\rangle} \\
&|2'\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}z_2 e^{i\boldsymbol{k}_{2'}\cdot\boldsymbol{r}}\chi_2(z_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{r},z_2)|0\rangle
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Ho separato volutamente la parte del vettore posizione che giace nel piano dei layer da quella ortogonale. Per quanto riguarda la variabile z il diverso pedice permette di distinguere i diversi supporti corispondenti ai due layer. Gli stati iniziale e finale sono stati di scattering descritti da onde piane: si assume che il trasferimento di impulso lungo la direzione z sia nullo e pertanto la dipendenza da z della funzione d'onda rimane immutata. Si può affermare con certezza che risulta congelata nell'interazione e quindi non cambia il suo numero quantico. Il momento trasferito è:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k'}_1 = \boldsymbol{k'}_2 - \boldsymbol{k}_2 \tag{2.83}$$

L'ampiezza di diffusione come compare nella resistività

$$V(q) \equiv \langle 1,2|V(q)|1',2'\rangle \tag{2.84}$$

diviene più chiara se si scrive l'operatore di interazione in seconda quantizzazione:

$$V = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}z\mathrm{d}\boldsymbol{x'}\mathrm{d}z'\psi^\dagger(\boldsymbol{x},z)\psi^\dagger(\boldsymbol{x'},z')V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'};z,z')\psi(\boldsymbol{x'},z')\psi(\boldsymbol{x},z) \tag{2.85}$$

A questo punto non resta che svolgere il prodotto interno ricordandosi le regole di commutazione canoniche degli operatori di campo. Si ottengono un termine diretto e uno di scambio. Il secondo tuttavia è trascurabile perchè i supporti delle funzioni d'onda sono sostanzialmente disgiunti in direzione z (tunneling fra i layer fortemente soppresso). L'invarianza traslazionale del potenziale assicura la conservazione dei momenti. Alcune trasformazioni di Fourier conducono al risultato:

$$\langle 1,2|V(q)|1',2'\rangle = \delta(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_{1'}-\boldsymbol{k}_{2'}+\boldsymbol{k}_2)\int \mathrm{d}z\mathrm{d}z'|\chi_1(z)|^2|\chi_2(z')|^2V(z,z';\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_{1'}) \tag{2.86}$$

Il potenziale da analizzare con il metodo semiclassico è quello che entra in quest'ultima espressione. Le due funzioni $\chi_i(z)$ riflettono l'approssimazione con cui si considerano i due layer. Tratterò le due approssimazioni di layer con spessore infinitesimo e finito.

2.3.3 Spessore infinitesimo

In questa approssimazione i due layer sono due piani infiniti posti ad una distanza d. Ossia li consideriamo definiti dalle condizioni geometriche:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ z &= -d \end{aligned} \tag{2.87}$$

L'equazione di Poisson per il potenziale[3] elettrostatico generato da una carica e_2 del layer 2 e schermato dalle cariche libere presenti in entrambi i layer è :

[3]Si riprende a questo punto la notazione con ϕ per indicare il potenziale elettrostatico.

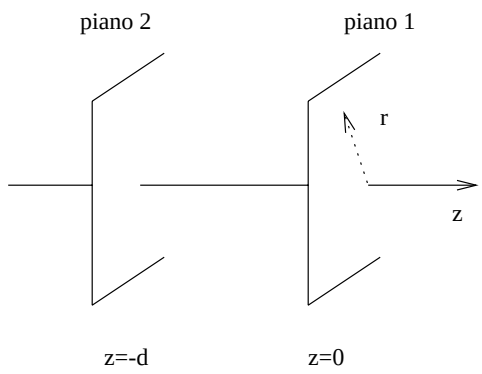


Figura 2.3: Rappresentazione schematica della situazione con piani di spessore infinitesimo. Si evidenziano le variabili z ed $\boldsymbol{r}$.

$$-\nabla^2 e_2\phi(\boldsymbol{r},z) = \frac{4\pi}{\varepsilon}[e_2\delta(\boldsymbol{r})\delta(z+d) + \rho_s(\boldsymbol{r},z)] \tag{2.88}$$

Le densità di carica sono rispettivamente la carica di prova posta nell'origine e tutte le altre cariche presenti. All'equilibrio, con carica di prova nulla, la densità di carica di screening è zero perchè il sistema è globalmente neutro grazie alla presenza di un background opportuno in ciascuno strato. Si è incluso il fatto che il tutto non è nello spazio vuoto, ma c'è un mezzo descritto da una certa costante dielettrica (ε).

$$\rho_s(\boldsymbol{r},z) = e_1\delta(z)[n_1(\boldsymbol{r}) - n_0^{(1)}] + e_2\delta(z+d)[n_2(\boldsymbol{r}) - n_0^{(2)}] \tag{2.89}$$

È evidente dall'equazione che sia lo strato 1 che lo strato 2 sono elettricamente neutri nello stato imperturbato: infatti la carica di screening è proporzionale ad $n_1(\boldsymbol{r})-n_0^{(1)}$ per lo strato 1 e ad $n_2(\boldsymbol{r})-n_0^{(2)}$ per lo strato 2. Ricordando la trattazione generale nella sezione 2.3.1 e tenendo presente che il sistema è bidimensionale:

$$\begin{aligned} &n_1(\boldsymbol{r}) \propto E_F^{(1)}(\boldsymbol{r}) = E_F - e_1\phi(\boldsymbol{r},0) \\ &n_0^{(1)} \propto E_F^{(1)} \end{aligned} \tag{2.90}$$

la dimensione due è cruciale perchè solamente in sistemi bidimensionali la densità di elettroni (quadratica nei momenti) è proporzionale all'energia cinetica con una costante di proporzionalità indipendente dal momento stesso.

$$
\begin{aligned}
n_1(\boldsymbol{r}) - n_0^{(1)} &\cong -n_0^{(1)} \frac{e_1 \phi(\boldsymbol{r}, 0)}{E_{0F}^{(1)}} \\
n_2(\boldsymbol{r}) - n_0^{(2)} &\cong -n_0^{(2)} \frac{e_2 \phi(\boldsymbol{r}, -d)}{E_{0F}^{(2)}}
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

La densità uniforme d'equilibrio è direttamente legata all'energia di Fermi:

$$
\begin{aligned}
n_0^{(1)} &= \frac{m^* E_{0F}^{(1)}}{\pi} \\
n_0^{(2)} &= \frac{m^* E_{0F}^{(2)}}{\pi}
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

sempre calcolata in unità naturali ove $\hbar = 1$. Ma allora la densità di carica di screening diventa:

$$
\rho_s(\boldsymbol{r}, z) = -\frac{m^*}{\pi}[e_1^2 \delta(z) + e_2^2 \delta(z+d)]\phi(\boldsymbol{r}, z) \tag{2.93}
$$

e, introducendo $q_{TF} = \frac{2m^* e^2}{k}$ con e modulo della carica dell'elettrone, l'equazione di Poisson si riduce a:

$$
\nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}, z) = 2q_{TF} \left[\frac{e_1^2}{e^2} \delta(z) + \frac{e_2^2}{e^2} \delta(z+d) \right] \phi(\boldsymbol{r}, z) - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon} \delta(\boldsymbol{r}) \delta(z+d) \tag{2.94}
$$

ossia, trasformando con Fourier nel piano definito dal vettore $\boldsymbol{r}$:

$$
\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - q^2 \right) \phi(q, z) = 2q_{TF} \left[\frac{e_1^2}{e^2} \delta(z) + \frac{e_2^2}{e^2} \delta(z+d) \right] \phi(q, z) - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon} \delta(z+d) \tag{2.95}
$$

La soluzione di una simile equazione differenziale è quasi ovunque libera.

$$
\phi(q, z) = \begin{cases} A \exp(-zq) + A' \exp(zq) & \text{per} \quad z > 0 \\ B \exp(-zq) + C \exp(zq) & \text{per} \quad -d < z < 0 \\ D' \exp(-zq) + D \exp(zq) & \text{per} \quad z < -d \end{cases} \tag{2.96}
$$

Condizioni di annullamento all'infinito impongono che $A' = D' = 0$. Le altre quattro costanti sono determinate dalla continuità del potenziale e dalla discontinuità della sua derivata nei punti di intersezione con i piani carichi come dettato dall'equazione di Poisson stessa. Le condizioni derivanti dalla continuità del potenziale si scrivono subito:

$$\begin{cases} A = B + C \\ B\exp(2qd) + C = D \end{cases} \tag{2.97}$$

Per determinare tutte le costanti ho bisogno di altre due condizioni che ricavo dalla discontinuità della derivata. Infatti:

$$\begin{aligned} &\lim_{\eta\to 0^+}\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\bigg|_{q,-d+\eta} - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\bigg|_{q,-d-\eta}\right] \overset{eq.Poisson}{=} \\ &\int_{-d-\eta}^{-d+\eta} \mathrm{d}z\{q^2\phi(q.z) + 2q_{TF}\left[\frac{e_1^2}{e^2}\delta(z) + \frac{e_2^2}{e^2}\delta(z+d)\right]\phi(q,z) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\delta(z+d)\} = \\ &2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}\phi(q,-d) - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.98}$$

e, analogamente, per il piano $z = 0$

$$\lim_{\eta\to 0^+}\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\bigg|_{q,+\eta} - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\bigg|_{q,-\eta}\right] = \ldots = 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}\phi(q,0) \tag{2.99}$$

Le ulteriori due condizioni derivanti dal raccordo discontinuo delle derivate sono:

$$\begin{cases} -qA + qB - qC = 2q_{TF}\dfrac{e_1^2}{e^2}A \\ -qB\exp(qd) + qC\exp(-qd) - qD\exp(-qd) = 2q_{TF}\dfrac{e_2^2}{e^2}D\exp(-qd) - \dfrac{4\pi e_2}{\varepsilon} \end{cases} \tag{2.100}$$

Riassumo il sistema di equazioni lineari che serve per calcolare le costanti in gioco scrivendolo in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & e^{2qd} & 1 & -1 \\ -q-2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2} & q & -q & 0 \\ 0 & -qe^{2qd} & q & -q-2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4\pi e_2}{\varepsilon}\exp(qd) \end{pmatrix}$$

Ossia, simbolicamente:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} \tag{2.101}$$

Bisogna dunque calcolare la matrice inversa, e poi applicarla al termine noto $\boldsymbol{v}$. Poichè a noi serve in realtà conoscere il potenziale ϕ solamente nel punto $z = 0$, la costante che dobbiamo calcolare è solamente A. La forma particolarmente semplice del termine noto $\boldsymbol{v}$ ci permette di ottenere il risultato desiderato calcolando solamente una entrata della matrice inversa. Il determinante della matrice $\boldsymbol{M}$ si calcola con il metodo di Laplace:

$$det\boldsymbol{M} = -4q_{TF}^2\frac{e_1^2e_2^2}{e^4} + 4e^{2qd}\left(q + q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}\right)\left(q + q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}\right) \tag{2.102}$$

Un confronto grafico mostra che il determinante di $\boldsymbol{M}$ è sempre positivo o nullo e si annulla solamente nel limite di mometo trasferito nullo. È assicurata quindi l'esistenza di un'unica soluzione. A noi serve in realtà:

$$\phi(q) = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}z'|\chi_1(z)|^2|\chi_2(z')|^2\phi(z,z',q) = \phi(0,-d,q) \tag{2.103}$$

e quindi:

$$\phi(0,-d,q) = A \tag{2.104}$$

Con un po' di lavoro:

$$A = \frac{2q\pi e^{qd}}{\varepsilon\left[-q_{TF}^2\frac{e_1^2e_2^2}{e^4} + e^{2qd}\left(q + q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}\right)\left(q + q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}\right)\right]} \tag{2.105}$$

Poichè la carica generatrice del potenziale era stata messa in $z = -d$, la soluzione è il potenziale appena calcolato valutato nell'origine ossia la costante A.

$$\phi(q) = \frac{4\pi e_2}{\varepsilon\left[-\exp(-2qd)\frac{q_{TF}^2}{q^2}\frac{e_1^2 e_2^2}{e^4} + \left(1+\frac{q_{TF}}{q}\frac{e_1^2}{e^2}\right)\left(1+\frac{q_{TF}}{q}\frac{e_2^2}{e^2}\right)\right]}\frac{\exp(-qd)}{2q} \tag{2.106}$$

La forma in cui è stato riscritto il coefficiente A mette in luce l'entità della schermatura e le sue peculiarità. Il potenziale elettrostatico generato da una carica e_2 posta nell'origine dello spazio vuoto calcolato su un piano a distanza d ha la forma[4]

$$\phi_0(q) = \frac{4\pi e_2}{2q}e^{-qd} \tag{2.107}$$

Se si considera un mezzo interposto si ottiene il primo schermaggio: la costante dielettrica. Nella costante si compendia un effetto di polarizzazione del mezzo su scala talmente piccola da risultare invisibile la variazione lenta del potenziale. Ci si trova subito ad una distanza tale che il potenziale ottenuto è quello di una carica ridotta di una frazione $1/\varepsilon$. Tale screening non è mai totale ma soprattutto è indipendente dal momento q. Credo si possa attribuire tale screening al reticolo positivo per il quale il riassestamento delle cariche è molto efficace su piccola scala, ma pressochè impossibile su larga scala a causa dei vincoli reticolari. Lo screening dei portatori liberi è invece compendiato nel fattore più complesso che contiene le cariche dei portatori e le loro masse efficaci (nei momenti di Thomas-Fermi).

Lo screening dipendente dal momento q è la peculiarità del nostro potenziale efficace di interazione. Il potenziale di interazione schermato dalla sola costante dielettrica k divergerebbe per piccoli momenti. Lo screening corregge questa divergenza perchè per piccoli momenti anche la correzione alla costante dielettrica diverge e con il medesimo andamento asintotico. Per grandi momenti invece la costante dielettrica satura a k. Tuttavia in tali regimi la dipendenza esponenzialmente descrescente del potenziale non schermato assicura che l'interazione tenda a zero e domina il profilo del potenziale. Anche il modulo delle cariche libere nei due layer influenza lo screening: portatori di carica con cariche maggiori offrono

[4] Anche se il problema ha una evidente simmetria sferica utilizzo cooordinate cilindriche per poter paragonare i risultati

uno schermo migliore. Per questo motivo il potenziale ϕ non è lineare nella carica e_2 ma presenta un massimo per poi decresce per cariche grandi rispetto a quella elettronica. Anche se verosimilmente la carica dei portatori presenti nei layer non si discosta molto da quella degli elettroni, l'esercizio non è fine a se stesso almeno in quanto portatori con carica efficace frazionaria sono stati ipotizzati nell'interpretazione dell'effetto Hall quantistico frazionario. Da ultimo si può analizzare la dipendenza del potenziale efficace di interazione dal momento di Thomas-Fermi q_{TF}: fissata la costante dielettrica, la massa efficace è l'unico parametro utile su cui agire essendo la carica dell'elettrone una costante universale. È evidente che q_{TF} rappresenta la scala naturale dei momenti per calcolare lo screening. Una variazione nel momento di Thomas-Fermi cambia il range di valori di q per i quali l'interazione è rilevante rispetto al suo valore di picco. L'interazione viene tuttavia complessivamente smorzata da un aumento di q_{TF}.

2.3.4 Spessore finito

In una rappresentazione realistica del sistema, i due strati, per quanto sottili, hanno uno spessore finito. La trattazione che conduce al calcolo della resistività di drag rimane comunque immutata perchè i gradi di libertà effettivi degli elettroni liberi rimangono pur sempre due essendo congelato il numero quantico che descrive il fattore della funzione d'onda relativo alla componente z. Il potenziale efficace di interazione è l'unico elemento ad essere influenzato dallo spessore finito nella formula che descrive la resistività.

La funzione di driver è sempre svolta dal layer 2: per questo motivo mi chiedo quale sia il potenziale generato da una carica puntiforme posta nel layer 2 quando interagisce con i due layer. In particolare pongo la mia carica di perturbazione in $(\mathbf{0}, z')$ cosiderando z' nel layer 2 e analizzo cosa succede nei due layer sapendo che la distribuzione iniziale di carica libera è $e_i n_F^0 |\chi_i(z)|^2$ con $i = 1, 2$. L'equazione di Poisson si scrive ancora:

$$-\nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}, z) = \frac{4\pi}{\varepsilon}[\rho_i(\boldsymbol{r}, z) + \rho_s(\boldsymbol{r}, z)] \tag{2.108}$$

Assumendo che la distribuzione in z non venga coinvolta nello screening (condizione ragionevole considerando che non viene mai coinvolta nell'interazione con altri elettroni essendo un grado di libertà congelato):

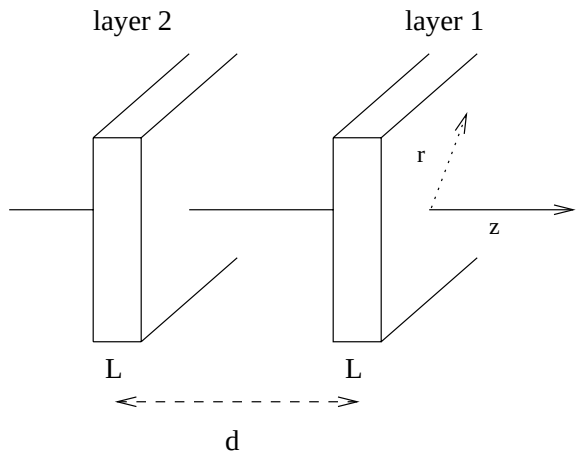


Figura 2.4: Rappresentazione schematica della situazione con piani di spessore finito. Si evidenziano le dimensioni dei layer, la distanza che li separa, variabili z ed $\boldsymbol{r}$.

$$\begin{aligned}
&\rho_i(\boldsymbol{r}, z; z') = e_2 \delta(\boldsymbol{r}) \delta(z - z') \\
&\rho_s(\boldsymbol{r}, z; z') = e_1 |\chi_1(z)|^2 \left[n_1(\boldsymbol{r}; z') - n_0^{(1)} \right] + e_2 |\chi_2(z)|^2 \left[n_2(\boldsymbol{r}; z') - n_0^{(2)} \right]
\end{aligned} \tag{2.109}$$

La variabile z' è stata distinta dalle altre perchè viene considerata un parametro del problema. Ancora una volta si parla di numeri d'onda locali di elettroni. Il potenziale chimico è però fissato e qui si avverte la presenza del layer finito perchè nell'energia locale entra la convoluzione sulla distribuzione in z della particella:

$$\begin{aligned}
\frac{k_{1F}^2(\boldsymbol{r}; z')}{2m^*} &= E_F^{(1)} - e_1 \int \mathrm{d}\bar{z} \phi(\boldsymbol{r}, \bar{z}; z') |\chi_1(\bar{z})|^2 \\
\frac{k_{2F}^2(\boldsymbol{r}; z')}{2m^*} &= E_F^{(2)} - e_2 \int \mathrm{d}\bar{z} \phi(\boldsymbol{r}, \bar{z}; z') |\chi_2(\bar{z})|^2
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Con passaggi identici a quelli dei layer di spessore infinitesimo si arriva all'equazione di Poisson:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - q^2\right)\phi(q,z;z') = {} & 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}|\chi_1(z)|^2\int \mathrm{d}\bar{z}\phi(q,\bar{z};z')|\chi_1(\bar{z})|^2 + \\ & + 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}|\chi_2(z)|^2\int \mathrm{d}\bar{z}\phi(q,\bar{z};z')|\chi_2(\bar{z})|^2 + \\ & - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon}\delta(z-z')\end{aligned} \tag{2.111}$$

Questa equazione si può risolvere con il metodo delle funzioni di Green [13]. Si scrive l'equazione fondamentale:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - q^2\right)G(z) = \delta(z) \tag{2.112}$$

Utilizzando la trasformata di Fourier si trova facilmente la funzione di Green soluzione della (2.112):

$$G(z) = -\frac{1}{2q}e^{-q|z|} \tag{2.113}$$

La soluzione dell'equazione fondamentale mi permette di ridurre l'originaria equazione integro-differenziale nell'equazione integrale:

$$\begin{aligned}\phi(q,z;z') = {} & \int \mathrm{d}\bar{z}G(z-\bar{z}) \\ & \left\{2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}|\chi_1(\bar{z})|^2\phi_1(q;z') + 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}|\chi_2(\bar{z})|^2\phi_2(q;z') - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon}\delta(\bar{z}-z')\right\}\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\phi_1(q;z') &= \int \mathrm{d}\bar{z}\phi(q,\bar{z};z')|\chi_1(\bar{z})|^2 \\ \phi_2(q;z') &= \int \mathrm{d}\bar{z}\phi(q,\bar{z};z')|\chi_2(\bar{z})|^2\end{aligned} \tag{2.114}$$

Ora, se

$$\begin{aligned}G_i(z) &= \int \mathrm{d}\bar{z}G(z-\bar{z})|\chi_i(\bar{z})|^2 \\ G_{ij} &= \int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}|\chi_i(z)|^2G(z-\bar{z})|\chi_j(\bar{z})|^2\end{aligned} \tag{2.115}$$

l'equazione prende la forma:

$$\phi(q,z;z') = 2q_{TF}\left[\frac{e_1^2}{e^2}G_1(z)\phi_1(q;z') + G_2(z)\frac{e_2^2}{e^2}\phi_2(q;z')\right] - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon}G(z-z') \quad (2.116)$$

Applicando all'equazione (2.116) i due operatori integrali:

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}z \ldots |\chi_1(z)|^2 \\ &\int \mathrm{d}z \ldots |\chi_2(z)|^2 \end{aligned} \quad (2.117)$$

mi riconduco ad un sistema di equazioni algebriche per ϕ_1 e ϕ_2. Ecco il sistema:

$$\begin{cases} \phi_1(q;z')\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}G_{11}\right] = 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}G_{21}\phi_2(q;z') - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon}G_1(z') \\ \phi_2(q;z')\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}G_{22}\right] = 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}G_{12}\phi_1(q;z') - \frac{4\pi e_2}{\varepsilon}G_2(z') \end{cases} \quad (2.118)$$

E la soluzione:

$$\begin{cases} \phi_1(q;z') = -\frac{4\pi e_2}{\varepsilon}\dfrac{G_1(z')\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}G_{22}\right] + G_2(z')2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}G_{21}}{\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}G_{11}\right]\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}G_{22}\right] - 4q_{TF}^2\frac{e_1^2e_2^2}{e^4}G_{21}G_{12}} \\ \phi_2(q;z') = -\frac{4\pi e_2}{\varepsilon}\dfrac{G_2(z')\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}G_{11}\right] + G_1(z')2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}G_{21}}{\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}G_{11}\right]\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}G_{22}\right] - 4q_{TF}^2\frac{e_1^2e_2^2}{e^4}G_{21}G_{12}} \end{cases} \quad (2.119)$$

Ma il nostro scopo è quello di trovare il potenziale $\phi(q)$ relativo ad elettroni con distribuzione in z non deltiforme. Il problema è tuttavia rapidamente risolubile, infatti basta pesare ϕ_2 (ottenuto pesando il potenziale $\phi(q,z,z')$ con la distribuzione degli elettroni nel layer 2) con la rispettiva distribuzione relativa al layer 1:

$$\phi(q) = \int \mathrm{d}z\phi_2(q;z)|\chi_1(z)|^2 \quad (2.120)$$

A questo punto basta moltiplicare il potenziale ottenuto per la carica e_1 per ottenere l'energia di interazione tra i due portatori di carica nei due layer e possedere

in questo modo l'elemento che compare nella regola d'oro di Fermi[5]. Considerando infine che $G_{12} = G_{21}$ si ottiene il risultato:

$$\phi(q) = -\frac{4\pi e_2}{\varepsilon} \frac{G_{21}}{\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_1^2}{e^2}G_{11}\right]\left[1 - 2q_{TF}\frac{e_2^2}{e^2}G_{22}\right] - 4q_{TF}^2\frac{e_1^2 e_2^2}{e^4}G_{21}G_{12}} \tag{2.121}$$

È utile dare una forma più concreta del risultato ottenuto, ancora piuttosto generale, deducendo le funzioni G_{ij} in un caso specifico: layer 1 e 2 identici e molto netti. Utilizzo lo stato fondamentale della buca infinita di potenziale:

$$\chi_1(z) = \begin{cases} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) & per \quad |z| < \frac{L}{2} \\ 0 & per \quad |z| > \frac{L}{2} \end{cases} \tag{2.122}$$

dove L è l'ampiezza dei layer. La $\chi_2(z)$ avrà la medesima forma funzionale, ma centrata sulla posizione $z = -d$. Abbiamo tutti gli elementi per calcolare le funzioni G_{ij}. Si ricorda che $G_{12} = G_{21}$ e, in questo caso specifico, vale anche $G_{11} = G_{22}$. Rimangono quindi solamente due casi effettivi:

$$\begin{aligned} G_{12} &= -\frac{1}{2q}e^{-qd}\left(\frac{8\pi^2}{qL(4\pi^2 + q^2L^2)}\mathrm{Sh}\frac{qL}{2}\right)^2 \\ G_{11} &= -\frac{1}{2q}\left[\frac{2}{qL} + \frac{qL}{4\pi^2 + q^2L^2} - \left(\frac{8\pi^2}{qL(4\pi^2 + q^2L^2)}\right)^2 e^{-qL/2}\mathrm{Sh}\frac{qL}{2}\right] \end{aligned} \tag{2.123}$$

E' interessante notare il limite $L \to 0$:

$$\begin{aligned} G_{12} &\to -\frac{1}{2q}e^{-qd} \\ G_{11} &\to -\frac{1}{2q} \end{aligned} \tag{2.124}$$

In questo limite si recupera la condizione di layer con spessore infinitesimo. Anche l'espressione del potenziale efficace si riduce a quella del caso precedente.

[5]Anche se le cariche e_1 ed e_2 non sono fattorizzate nell'energia potenziale perchè compaiono anche nella costante dielettrica di screening, posso definire formalmente $U = \phi/e_1e_2$. Questo potenziale permette una definizione più simmetrica di resistività di drag pur dipendendo nello screening ancora dalle cariche.

2.4 Suscettività bidimensionale

Nella deduzione della resistività di drag si incontrano due elementi fondamentali: uno è il potenziale efficace di interazione, l'altro la suscettività (bidimensionale). Nel potenziale efficace di interazione si valuta il ruolo dell'interazione di Coulomb e dello schermo dovuto al mezzo e alle altre cariche libere presenti. Nella suscettività si compendia invece il contributo più strettamente legato allo spazio delle fasi disponibile all'evento di scattering e quindi al trasferimento di momento che è alla base del fenomeno del Coulomb drag. La definizione più corretta di suscettività è quantitstica, ma nel limite classico si può scrivere:

$$\chi(q,\omega) = -\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} \frac{f^0(\epsilon) - f^0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon' + \omega + i\delta} \tag{2.125}$$

dove:

$$\begin{aligned} \epsilon &= E_0 + \frac{k^2}{2m^*} \\ \epsilon' &= E_0 + \frac{k'^2}{2m^*} \\ \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{k'} - \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2.126}$$

E_0 rappresenta l'energia del fondo della banda in cui sono collocati gli elettroni. Siccome penso la banda parabolica è possibile definire una massa efficace isotropa (unica) m^*. Mi metto nel limite di temperatura nulla. In questa approssimazione si possono svolgere analiticamente i conti. Il passo successivo sarà cercare di eliminare questo vincolo. La distribuzione di Fermi-Dirac diventa la funzione a gradino. Di conseguenza il numeratore dell'integranda non fa altro che definire i domini di integrazione. Si distinguono due situazioni qualitativamente diverse come si evidenzia in figura (2.4):

$$\begin{aligned} q &< 2k_F \\ q &> 2k_F \end{aligned} \tag{2.127}$$

Il denominatore dell'integranda costituisce un altro spunto interessante di calcolo. In realtà sono interessato alla parte immaginaria della suscettività e con l'ausilio delle formule di Sochoskji questo porta una semplificazione:

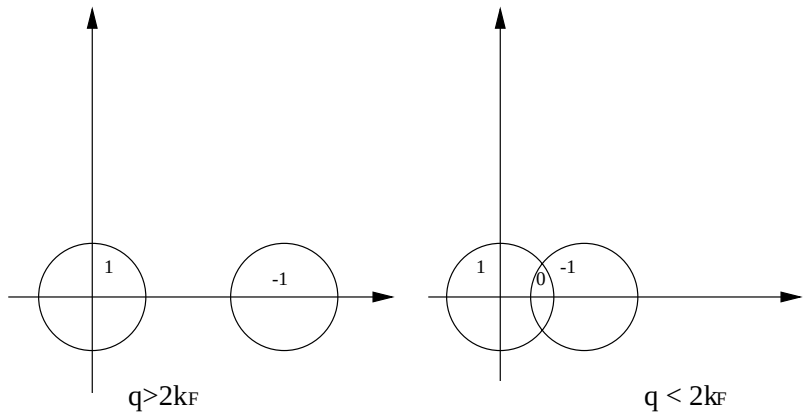


Figura 2.5: *Rappresentazione dei domini di interazione per il calcolo dellla suscettività generalizzata a temperatura 0. Si distinguono le condizioni con $q > 2k_F$ e $q < 2k_F$*

$$-\Im\frac{1}{\epsilon - \epsilon' + \omega + i\delta} = \pi\delta\left(\omega - \frac{1}{2m^*}(q^2 + 2qk\cos\theta)\right) \tag{2.128}$$

dove $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{kq}$. Convenzionalmente poniamo $\boldsymbol{q} = q\hat{\boldsymbol{x}}$. Ma allora si può dire che $k\cos\theta = k_x$ e, usando la nota formula per la distribuzione delta:

$$\delta(f(x)) = \sum_\alpha \frac{1}{|f'(x_\alpha)|}\delta(x - x_\alpha) \tag{2.129}$$

si può semplificare l'integrale riducendolo a:

$$\Im\chi(q,\omega) = \frac{\pi m^*}{q}\left[\int_{D+}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\delta(k_x - \frac{m^*\omega}{q} + \frac{q}{2}) - \int_{D-}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\delta(k_x - \frac{m^*\omega}{q} + \frac{q}{2})\right] \tag{2.130}$$

dove i due domini di integrazione si riferiscono al supprto di $f(\epsilon)$ $(D+)$ e di $f(\epsilon')$ $(D-)$. Nel caso in cui i due domini siano disgiunti l'integranda vale $+1$ sul primo e -1 sul secondo. La delta fissa la sezione del piano su cui integrare. Si verifica che tale sezione abbia intersezione non vuota con i suppporti delle due distribuzioni di Fermi. L'integrale si riduce allora alla misura di corde di cerchi. La casistica si infittisce ma, con un po' di attenzione, si raggiunge facilmente il risultato.

$$\Im\chi(q,\omega) = \begin{cases} \dfrac{m^* k_F}{2\pi q}\left\{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{v_F q}-\dfrac{q}{2k_F}\right)^2\right]^{1/2} - \left[1-\left(\dfrac{\omega}{v_F q}+\dfrac{q}{2k_F}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad per \quad (q,\omega)\in A \\ \dfrac{m^* k_F}{2\pi q}\left[1-\left(\dfrac{\omega}{v_F q}-\dfrac{q}{2k_F}\right)^2\right]^{1/2} \qquad per \quad (q,\omega)\in B \\ \dfrac{m^* k_F}{2\pi q}\left[1-\left(\dfrac{\omega}{v_F q}-\dfrac{q}{2k_F}\right)^2\right]^{1/2} \qquad per \quad (q,\omega)\in C \\ 0 \quad altrove \end{cases} \tag{2.131}$$

dove i sottoinsiemi del dominio A, B, C sono definiti dalle disequazioni:

$$\begin{aligned} A &= \{(q,\omega)\,|\,q<2k_F, \quad 0<\omega<v_F q(1-q/2k_F)\} \\ B &= \{(q,\omega)\,|\,q<2k_F, \quad v_F q(1-q/2k_F)<\omega<v_F q(1+q/2k_F)\} \\ C &= \{(q,\omega)\,|\,q<2k_F, \quad v_F q(-1+q/2k_F)<\omega<v_F q(1+q/2k_F)\} \end{aligned} \tag{2.132}$$

La restrizione di temperatura nulla permette il calcolo analitico della suscettività tuttavia non può essere accettata perchè si verifica facilmente che la temperatura di Fermi per i campioni in esame è dell'ordine del grado Kelvin, temperatura alla quale si svolgono gli esperimenti. Ora, il supporto della funzione di Fermi-Dirac è approssimativamente un cerchio centrato nell'origine e di raggio pari a $R \approx [k_F^2 + 8m^* k_B T]^{1/2}$. Questo significa che la sostanza del calcolo non viene cambiata. Tuttavia le sfere di supporto sono quasi sempre incrociate. Infatti la situazione in cui il momento trasferito è maggiore del momento di Fermi è esponenzialmente soppressa dal termine di interazione Coulombiana, essendo la distanza tra i layer dell'ordine della decina di nanometri.

Capitolo 3

Formalismo di Kubo

3.1 Resistività di drag: deduzione quantistica con $B = 0$

Mi propongo di calcolare la resistività di drag di un sistema a doppio strato sotto l'ipotesi che l'interazione fra i due strati sia semplicemente quella di Coulomb schermata in modo autoconsistente. Ad allontanare dall'equilibrio il sistema è solamente il campo elettrico applicato dall'esterno ad uno dei due layer. Centri di scattering disposti in modo casuale mantengono uno stato stazionario introducendo dissipazione. In particolare, dal punto di vista microscopico, il modello con il quale tratto i due layer è quello di elettroni indipendenti interagenti con impurezze randomizzate. Si trascura l'interazione incrociata fra elettroni di uno strato e impurezze dell'altro [15].

Tecnicamente sono partito dalla conducibilità di Kubo sviluppandola in serie dell'interazione fino all'ordine dominante (il secondo, almeno in corrente continua) secondo la tecnica delle funzioni di Green a temperatura finita (Matsubara). Cellula fondamentale del calcolo è il correlatore corrente-densità-densità chiamato anche, per la sua rappresentazione diagrammatica, 'funzione triangolare'. Da ultimo ho fatto il limite balistico (o di Boltzmann): questo mi ha permesso di recuperare la soluzione classica e di dare una interpretazione più chiara ai risultati ottenuti.

3.1.1 Le funzioni triangolari

Un modo canonico per calcolare conducilità di sistemi fisici di cui si conoscano le proprietà microscopiche è l'utilizzo della formula di Kubo. Essa deriva semplicemente dall'analisi statistica della risposta lineare di un sistema prima all'equilibrio sotto l'azione di una hamiltoniana (forza) esterna [10]. In particolare la formula di Kubo si può applicare al nostro sistema a doppio strato ed ottenere il punto di partenza della nostra analisi [15]:

$$\sigma_{12}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'},\Omega) = \frac{ie^2}{\Omega}\prod\nolimits_{12}^{\alpha\beta,r}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'},\Omega). \tag{3.1}$$

La polarizzazione che compare nella formula è quella ritardata. Tale polarizzazione è difficile da calcolare, ma ricordando che

$$\prod_{12}^{\alpha\beta,r}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'},\Omega) = \lim_{i\Omega_n\to\Omega+i\delta}\prod_{12}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'},\Omega_n) \tag{3.2}$$

la si riconduce ad una forma in cui è applicabile il teorema di Wick generalizzato. La polarizzazione si scrive:

$$\prod\nolimits_{12}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'},\tau-\tau') = -\langle T_\tau\left\{J_{1H}^{\alpha}(\boldsymbol{x},\tau)J_{2H}^{\beta}(\boldsymbol{x}',\tau')\right\}\rangle \tag{3.3}$$

ove gli operatori di corrente sono in rappresentazione di Heisenberg e la media è fatta sull'ensemble grancanonico. Sia nel condurre la media che nel costruire gli operatori si è usata la hamiltoniana totale:

$$H_T = H_1 + H_2 + H_{12} \tag{3.4}$$

dove

$$H_{12} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r_1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r_2}\rho_1(\boldsymbol{r_1})U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2})\rho_2(\boldsymbol{r_2}). \tag{3.5}$$

con U_{C} potenziale di Coulomb.

Supponiamo di aver completamente risolto le due hamiltoniane di singolo layer; è possibile ricondurre interamente la complessità dell'interazione in un termine chiamato matrice S:

$$\prod_{12}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'},\tau-\tau') = -\frac{Tr\left[e^{-\beta(K_1+K_2)}T_\tau\{S(\beta)J^{\alpha}_{1K_0}(\boldsymbol{x},\tau)J^{\beta}_{2K_0}(\boldsymbol{x}',\tau')\}\right]}{Tr\left[e^{-\beta(K_1+K_2)}S(\beta)\right]} \tag{3.6}$$

dove $K_i = H_i - N_i\mu_i$ e $S(\beta)$ è uno sviluppo in serie dell'interazione:

$$S(\beta) \approxeq 1 - T_\tau\left\{\int_0^\beta \mathrm{d}\tau_1 \hat{H}_{12}(\tau_1)\right\} + \frac{1}{2}T_\tau\left\{\int_0^\beta \mathrm{d}\tau_1 \int_0^\beta \mathrm{d}\tau_2 \hat{H}_{12}(\tau_1)\hat{H}_{12}(\tau_2)\right\} + \dots \tag{3.7}$$

All'ordine zero nell'interazione la polarizzazione ritardata è identicamente nulla in quanto le due correnti sono completamente disaccoppiate e dunque il loro commutatore è nullo. L'ordine uno è non banale, tuttavia si puó dimostrare che la conducibilità di drag è funzione delle conducibilità interne ai due layers e inoltre si annulla nel limite di corrente continua. Lo sviluppo al primo ordine nell'interazione della polarizzazione infatti è:

$$\begin{aligned}\prod_{12}^{\alpha\beta}&(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'},\tau-\tau')^{(1)}\\ &= \int_0^\beta \mathrm{d}\tau_1 \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \langle T_\tau\{\hat{J}^{\alpha}_1(\boldsymbol{x},\tau)\hat{\rho}_1(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\}\rangle\\ &\times U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\langle T_\tau\{\hat{\rho}_2(\boldsymbol{r}_2,\tau_1)\hat{J}^{\beta}_2(\boldsymbol{x}',\tau')\}\rangle\end{aligned} \tag{3.8}$$

La media sull'ensemble si divide nelle due medie distinte sul primo e sul secondo layer. Questo perchè l'evoluzione temporale degli operatori corrente e densità è ottenuta semplicemente con le hamiltoniane di singolo layer e anche la media viene calcolata su una distribuzione canonica privata dell'hamiltoniana di interazione tra i layer. Le medie corrente-densità si possono trasformare in valori di aspettazione corrente-corrente utilizzando l'equazione di conservazione:

$$i\Omega\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{3.9}$$

Utilizzando quest'ultima equazione nella (3.8) si ottiene, trasformando con Fourier ed eseguendo il limite che porta alla polarizzazione ritardata:

$$\sigma^{\alpha\beta}_{12}(\boldsymbol{q},\Omega)^{(1)} = \frac{1}{ie_1e_2\Omega}\sum_{\gamma,\delta}\sigma^{\alpha\gamma}_{11}(\boldsymbol{q},\Omega)q^\gamma U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{q})q^\delta\sigma^{\delta\beta}_{22}(\boldsymbol{q},\Omega) \tag{3.10}$$

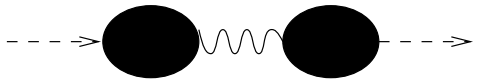


Figura 3.1: *Rappresentazione schematica dello sviluppo al primo ordine dell'interazione di Coulomb della conducibilità*

Il limite $\boldsymbol{q} \to 0$ necessario al calcolo della conducibilità in regime di corrente uniforme fornisce il risultato annunciato di conducibilità nulla e spinge quindi a indagare il secondo ordine perturbativo.

Una spiegazione fisica dell'annullamento del primo ordine perturbativo si può ricercare nel fatto che esso corrisponde alla situazione in cui una carica netta locale su un layer interagisca attraverso il potenziale Coulombiano con una carica netta sull'altro layer. In regime di corrente continua e uniforme questo non è possibile perchè i due layer sono anche localmente neutri. Il secondo ordine perturbativo studia invece le fluttuazioni di carica e quindi dà un risultato non nullo.

L'espansione quadratica è il primo termine ad interessarci in modo diretto: qualche trasformazione di Fourier unita alla proprietà di invarianza traslazionale posseduta dal sistema ci consente di affermare che:

$$\begin{aligned}\prod\nolimits_{12}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{Q}, i\Omega_n) = -\frac{1}{2S}\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{1}{\beta}\sum_m U_{\mathrm{C}}^*(q)U_{\mathrm{C}}(q+Q) \\ \Delta_1^\alpha(q+Q, q; i\Omega_n + i\omega_m, i\omega_m \\ \Delta_2^\beta(-q-Q, -q; -i\Omega_n - i\omega_m, -i\omega_m)\end{aligned} \tag{3.11}$$

dove $\Omega_n = 2\pi n(\beta\hbar)^{-1}$ sono le frequenze di Matsubara.

Le funzioni delta, dette anche triangolari non sono altro che:

$$\Delta_1^\alpha(\boldsymbol{x}\tau, \boldsymbol{x}'\tau', \boldsymbol{x}''\tau'') = -\langle T_\tau \left\{\hat{j}(\boldsymbol{x}\tau)\hat{\rho}(\boldsymbol{x}'\tau')\hat{\rho}(\boldsymbol{x}''\tau'')\right\}\rangle \tag{3.12}$$

e le rispettive trasformate di Fourier grazie alla invarianza traslazionale e temporale del sistema, dipendono soltanto da due variabili momento ed energia. La formula della polarizzazione può essere ulteriormente semplificata svolgendo la somma sulle frequenze di Matsubara, facendo la continuazione analitica che ci riporta alla conducibilità vera e propria ed infine mettendoci in condizione di corrente uniforme e continua. La somma sulle frequenze di Matsubara si effettua utilizzando un

metodo standard: data una funzione analitica del piano complesso $f(z)$ tale che $|f(z)| \leqq |z|$ per $z \to \infty$ allora dalla teoria dei residui vale l'uguaglianza:

$$\frac{1}{\beta}\sum_n f(i\omega_n) = \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} n_B(z) f(z) \tag{3.13}$$

dove

$$\begin{aligned} \omega_n &= n\frac{2\pi}{\hbar\beta} \\ n_B(z) &= \frac{1}{\exp(\beta z) - 1} \end{aligned} \tag{3.14}$$

sono rispettivamente le frequenze di Matsubara bosoniche e l'estensione al piano complesso della funzione di distribuzione di Bose. L'integrale è condotto su una circonferenza di raggio infinito percorsa in senso orario. Ricordando che nel nostro caso l'integrando non è analitico ma presenta dei tagli in $\Im z = 0$ e $\Im z = -\Omega_n$ [15] la tecnica deve essere leggermente affinata.

L'integrale va esteso al cammino descritto in figura (3.2). La conducibilità di drag non è altro che il prolungamento analitico (retarded) della funzione di correlazione corrente-corrente. Quest'ultima si può rappresentare diagrammaticamente come il prodotto di due triangoli congiunti dall'interazione Coulombiana (vedi figura 3.3)

Nell'approssimazione brutale che i due sistemi di elettroni indipendenti non interagiscano con centri di scattering, la hamiltoniana complessiva del sistema sarebbe:

$$H_T = H_1 + H_2 + H_{12} \tag{3.15}$$

dove le due hamiltoniane dei sottosistemi sono semplicemente cinetiche. In questa approssimazione le funzioni triangolari assumono un aspetto particolarmente trasparente:

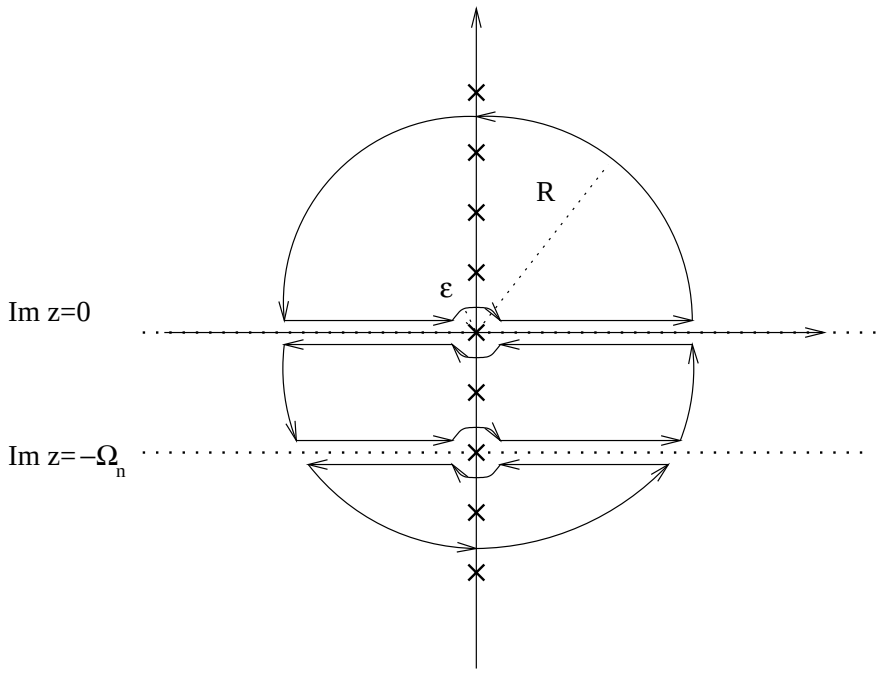


Figura 3.2: *Somma sulle frequenze di Matsubara. Si notano i due tagli nel piano complesso. Sull'asse immaginario sono indicate le fraquenze di Matsubara. L'integrale si intende condotto sul cammino che si ottiene nel limite $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ in modo che tutte le frequenze vengano correttamente contate.*

$$\begin{aligned}
&\Delta_1^\alpha(\boldsymbol{x}\tau, \boldsymbol{x'}\tau', \boldsymbol{x''}\tau'') = -\langle T_\tau \left\{ \hat{j}_1^\alpha(\boldsymbol{x}\tau)\hat{\rho}_1(\boldsymbol{x'}\tau')\hat{\rho}_1(\boldsymbol{x''}\tau'') \right\} \rangle = \\
&-\frac{ie}{2m}\Big(\langle T_\tau \left\{ \psi_1^\dagger(\boldsymbol{x}\tau)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\psi_1(\boldsymbol{x}\tau)\psi_1^\dagger(\boldsymbol{x'}\tau')\psi_1(\boldsymbol{x'}\tau')\psi_1^\dagger(\boldsymbol{x''}\tau'')\psi_1(\boldsymbol{x''}\tau'') \right\} \rangle \\
&\quad - \langle T_\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\psi_1^\dagger(\boldsymbol{x}\tau)\psi_1(\boldsymbol{x}\tau)\psi_1^\dagger(\boldsymbol{x'}\tau')\psi_1(\boldsymbol{x'}\tau')\psi_1^\dagger(\boldsymbol{x''}\tau'')\psi_1(\boldsymbol{x''}\tau'') \right\} \rangle\Big)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dove $\hat{j}_1^\alpha(\boldsymbol{x}\tau)$ è solo la parte di polarizzazione della corrente (quella di spostamento

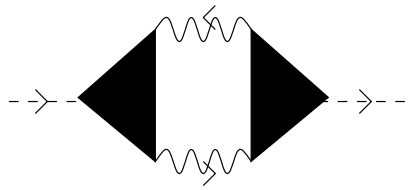


Figura 3.3: *Una rappresentazione grafica sintetica della funzione di correlazione corrente-corrente: i due triangoli neri sono le due Δ, le linee ondulate rappresentano l'interazione e portano rispettivamente momento ed energia $(q, i\omega_m)$ e $(Q+q, i\Omega_n+i\omega_m)$ coerentemente con il fatto che le linee tratteggiate portano momento ed energia $(\boldsymbol{Q}, i\Omega_n)$ Nel limite di corrente continua $\boldsymbol{Q}$ e $\Omega \to 0$.*

è di ordine E^2). Scritta nello spazio dei momenti la (3.16) diventa:

$$\Delta_1^\alpha(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}; i\Omega_n + i\omega_m, i\omega_m) =$$
$$-\frac{e}{mS\beta}\sum_{\boldsymbol{k},l}\frac{1}{2}(\boldsymbol{2k}-\boldsymbol{Q})^\alpha\{G_1(\boldsymbol{k}, ik_l)G_1(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}, ik_l+i\Omega_n)G_1(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{q}, ik_l+i\Omega_n+i\omega_m)+$$
$$G_1(\boldsymbol{k}, ik_l)G_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q}, ik_l-i\Omega_n)G_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}, ik_l-i\Omega_n-i\omega_m)\} \tag{3.17}$$

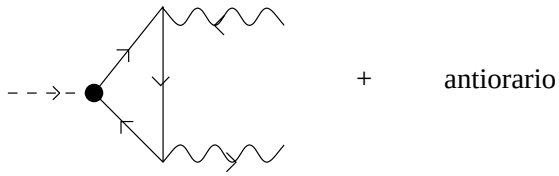


Figura 3.4: *Rappresentazione schematica della funzione a triangolo in approssimazione di Hamiltoniana di singolo layer libera. Le linee continue sono funzioni di Green libere, quelle ondulate rappresentano l'interazione di Coulomb, Il punto distingue il vertice di corrente (vettoriale) da quelli di carica.*

Nella rappresentazione diagrammatica (fig. 3.4) è più evidente la semplicità del risultato. Questa semplicità si riflette però nell'inadeguatezza del modello a spiegare il comportamento del campione: il calcolo della conducibilità in corrente continua porta infatti al risultato di conducibilità nulla. Sono necessarie delle correzioni che introducano smorzamento. La prima correzione da effettuare è sicuramente quella di sostituire alle funzioni di Green nude quelle vestite attraverso

la self-energia da scattering su impurezze. All'ordine successivo si introducono le correzioni di vertice.

3.1.2 Scattering su impurezze: calcolo della self-energia

Il modo più diretto per introdurre delle impurezze in un sistema di molte particelle è pensarle come un potenziale esterno. È naturale pensare che la singola impurezza generi attorno a sè un potenziale centrale. Ne consegue la forma dell'energia potenziale da inserire nell'equazione di Schroedinger per il singolo elettrone in presenza di N impurezze :

$$V_{imp}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} V(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_j|) \tag{3.18}$$

per una equazione di Schroedinger:

$$H\psi_\lambda = \left[-\frac{1}{2m^*}\nabla^2 + V_{imp}(\boldsymbol{x}\right]\psi_\lambda(\boldsymbol{x}) \tag{3.19}$$

Un problema a molti corpi si affronta meglio in seconda quantizzazione dove sparisce l'indice di particella e i soggetti che intervengono sono gli operatori di campo. In tale rappresentazione la hamiltoniana prende la forma:

$$H = \frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{k}\sigma}\frac{k^2}{2m^*}C^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}C_{\boldsymbol{k}\sigma} + \frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{q}}\rho(\boldsymbol{q})V(\boldsymbol{q})\rho_{imp}(\boldsymbol{q}) \tag{3.20}$$

dove S è l'area del campione e:

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{q}) &= \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} C^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\,\sigma}C_{\boldsymbol{k}\sigma} \\ \rho_{imp}(\boldsymbol{q}) &= \sum_j e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}_j} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Si dimostra infatti a partire dalla definizione di operatore di singola particella in seconda quantizzazione:

$$
\begin{aligned}
\hat{V} = \sum_{\sigma} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) \sum_{j} V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_j) \hat{\psi}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \\
\sum_{\sigma} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) \sum_{j} V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_j) \hat{\psi}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \\
\frac{1}{S^2} \sum_{\sigma \boldsymbol{k} \boldsymbol{k}'} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} C^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \sum_{j} V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_j) e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} C_{\boldsymbol{k}'\sigma} = \\
\frac{1}{S^2} \sum_{\sigma \boldsymbol{k} \boldsymbol{q}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} C^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\sigma} \sum_{j} V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_j) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} C_{\boldsymbol{k}\sigma}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Fino ad ora ho ritenuto possibile conoscere con esattezza le posizioni delle impurezze ($\boldsymbol{R}_j$). In realtà la mia conoscenza del sistema è molto più povera e mi è consentito al più sapere se c'è una correlazione tra le impurezze stesse. Tutti i risultati esatti ottenuti da una fissata distribuzione andranno quindi mediati su tutte le possibili distribuzioni dando a ciascuna di esse un peso determinato dalla correlazione. Impurezze completamente scorrelate corrispondono ad un peso identico per ciascuna distribuzione. Per la valutazione delle funzioni di Green e di conseguenza delle proprietà fisiche del sistema userò la tecnica perturbativa. Nel contesto di tale approccio, quando si espande la matrice S, ci si trova a di fronte a prodotti di funzioni densità di impurezze e di conseguenza loro medie spaziali nel senso sopra delineato. Nella forma più generale:

$$
f_k(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_k) \equiv \langle \rho_{imp}(\boldsymbol{q}_1) \rho_{imp}(\boldsymbol{q}_2) \ldots \rho_{imp}(\boldsymbol{q}_k) \rangle_{AV} \tag{3.23}
$$

Per comprendere il significato di questa media (che non è sull'ensemble elettronico ma sulla distribuzione delle impurezze) comincio a considerare alcuni esempi con k piccolo:

$$
\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{q}_1) \equiv \langle \rho_{imp}(\boldsymbol{q}_1) \rangle_{AV} = \\
\int \mathrm{d}\boldsymbol{R}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{R}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{R}_N W(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_N)(e^{i\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{q}_1} + e^{i\boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{q}_1} + \ldots + e^{i\boldsymbol{R}_N\cdot\boldsymbol{q}_1})
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

dove la funzione peso è stata evidenziata e N è il numero di impurezze. Sorge ora il problema di identificare la forma di questa funzione. Le impurezze, sostanzialmente immobili, sono oggetti distinguibili; è possibile trattarle come un ensemble

canonico classico. La funzione peso ha pertanto la forma $Z^{-1}\exp(-\beta H)$. Nel nostro caso le impurezze sono cariche e tra loro soggette a forza repulsiva più o meno schermata. Poniamo:

$$H_{i-i} = \sum_{i<j} \frac{\Lambda}{|\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j|} \tag{3.25}$$

Se la densità di impurezze è molto bassa si puossono considerare le impurezze completamente scorrelate. Allora la funzione peso diventa semplicemente:

$$W(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_N) = \frac{1}{S^N} \tag{3.26}$$

Allora $f_1(\boldsymbol{q}_1) = N\delta_{\boldsymbol{q}_1,0}$. Il caso con $k = 2$ diventa:

$$\begin{aligned} &f_2(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) \equiv \langle \rho_{imp}(\boldsymbol{q}_1)\rho_{imp}(\boldsymbol{q}_2)\rangle_{AV} = \\ &\int \mathrm{d}\boldsymbol{R}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{R}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{R}_N W(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_N) \\ &\quad (e^{i\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{q}_1} + e^{i\boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{q}_1} + \ldots + e^{i\boldsymbol{R}_N\cdot\boldsymbol{q}_1})(e^{i\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{q}_2} + e^{i\boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{q}_2} + \ldots + e^{i\boldsymbol{R}_N\cdot\boldsymbol{q}_2}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Separo nelle integrazioni i due casi $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_j$ e $\boldsymbol{R}_i \neq \boldsymbol{R}_j$. Il primo caso si riconduce facilmente alla situazione del punto precedente e dà quindi come risultato:

$$N\delta_{\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2,0} \tag{3.28}$$

Nel secondo caso le variabili rilevanti nell'integrazione sono 2. Gli $N(N-1)$ addendi che si ottengono sono tutti fattorizzati e il risultato è:

$$N(N-1)\delta_{\boldsymbol{q}_1,0}\delta_{\boldsymbol{q}_2,0} \tag{3.29}$$

Si può dimostrare una formula del tutto generale (Kohn e Luttinger-1957):

$$f_k(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_k) = \sum_{j=1}^{k} j! \binom{N}{j} \sum_{\{\mathrm{p_i}\}} \delta_{\sum_{i\in \mathrm{p_1}} \boldsymbol{q}_i,0} \ldots \delta_{\sum_{i\in \mathrm{p_j}} \boldsymbol{q}_i,0} \tag{3.30}$$

Dove $\{\mathrm{p_i}\}$ sono le partizioni degli indici $1 \dots k$ in j gruppi.

Poiché tipicamente $N \cong 10^{10}$, usando la formula di Stirling con $k \ll N$ si approssima

$$\binom{N}{k} \approx \frac{1}{k!} N^k \tag{3.31}$$

Ad esempio il caso con $k = 3$ diventa:

$$\begin{aligned} f_3(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = & N\delta_{\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3,0} + N^2(\delta_{\boldsymbol{q}_1,0}\delta_{\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3,0} + \delta_{\boldsymbol{q}_2},0\delta_{\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_3,0} + \delta_{\boldsymbol{q}_1,0}\delta_{\boldsymbol{q}_3+\boldsymbol{q}_2,0}) + \\ & N^3\delta_{\boldsymbol{q}_1,0}\delta_{\boldsymbol{q}_2,0}\delta_{\boldsymbol{q}_3,0} \end{aligned} \tag{3.32}$$

A queste espressioni matematiche si può far corrispondere una rappresentazione in termini di diagrammi di Feynmann. Più precisamente si può rappresentare la funzione di Green del sistema con impurezze sviluppata all'ordine n. Svolgo fino in fondo il caso di $n = 3$.

$$\begin{aligned} & G^{(3)}(\boldsymbol{p}, ip_n) \equiv \\ & \left\langle \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \exp(ip_n\tau) \frac{1}{3!} \int_0^\beta \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2 \mathrm{d}\tau_3 \langle T_\tau[V(\tau_1)V(\tau_2)V(\tau_3)C^\dagger_{\boldsymbol{p}}(\tau)C_{\boldsymbol{p}}(0)]\rangle \right\rangle_{AV} \end{aligned} \tag{3.33}$$

dove tutti gli operatori sono scritti in rappresentazione di interazione. A questo punto si sviluppano i tre potenziali e si eseguono le contrazioni secondo il teorema di Wick generalizzato alla temperatura finita[1], con la media $\langle \dots \rangle_{AV}$:

[1] Per la dimostrazione dettagliata vedi ad esempio [11]

$$
\begin{aligned}
&G^{(3)}(\boldsymbol{p}, ip_n) = \\
&\frac{1}{S^3}\sum_{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3} V(\boldsymbol{q}_1)V(\boldsymbol{q}_2)V(\boldsymbol{q}_3)\left\langle \sum_{ijk} \exp(i\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{R}_i + i\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{R}_j + i\boldsymbol{q}_3\cdot\boldsymbol{R}_k\right\rangle_{AV} \times \\
&\int_0^\beta \mathrm{d}\tau \exp(ip_n\tau)\frac{1}{3!}\int_0^\beta \mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_3 \\
&\frac{1}{S^3}\sum_{\boldsymbol{klm}}\langle T_\tau[C^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}_1}(\tau_1)C_{\boldsymbol{k}}(\tau_1)C^\dagger_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{q}_2}(\tau_2)C_{\boldsymbol{l}}(\tau_2)C^\dagger_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{q}_3}(\tau_3)C_{\boldsymbol{m}}(\tau_3)C^\dagger_{\boldsymbol{p}}(\tau)C_{\boldsymbol{p}}(0)]\rangle = \\
&\frac{1}{S^3}\sum_{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3} V(\boldsymbol{q}_1)V(\boldsymbol{q}_2)V(\boldsymbol{q}_3)f_3(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)\int_0^\beta \mathrm{d}\tau \exp(ip_n\tau)\frac{1}{3!}\int_0^\beta \mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_3 \\
&\frac{1}{S^3}\sum_{\boldsymbol{klm}}\langle T_\tau[C^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}_1}(\tau_1)C_{\boldsymbol{k}}(\tau_1)C^\dagger_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{q}_2}(\tau_2)C_{\boldsymbol{l}}(\tau_2)C^\dagger_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{q}_3}(\tau_3)C_{\boldsymbol{m}}(\tau_3)C^\dagger_{\boldsymbol{p}}(\tau)C_{\boldsymbol{p}}(0)]\rangle
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

A priori non potrei considerare identici i fattori dati da permutazioni dei punti interni perchè ad una qualsiasi di queste permutazioni, rinominando opportunamente le variabili mute, corrisponderebbe una permutazione dei tre momenti. Tenendo presente però che

$$
f_3(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3) = f_3(\boldsymbol{q}_{\sigma(1)},\boldsymbol{q}_{\sigma(2)},\boldsymbol{q}_{\sigma(3)}) \tag{3.35}
$$

Gli integrali sui τ si possono svolgere e portano alla legge semplice che la frequenza delle funzioni di Green si conserva nell'interazione con l'impurezza. Si arriva al risultato:

$$
\begin{aligned}
&G^{(3)}(\boldsymbol{p}, ip_n) = \frac{1}{S^3}\sum_{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3} V(\boldsymbol{q}_1)V(\boldsymbol{q}_2)V(\boldsymbol{q}_3)f_3(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3) \\
&G^{(0)}(\boldsymbol{p}, ip_n)G^{(0)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}_1, ip_n)G^{(0)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2, ip_n)G^{(0)}(\boldsymbol{p}, ip_n)\delta_{\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Tale costruzione ha una suggestiva rappresentazione grafica (vedi figura 3.5):

La forma di $f_3(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)$ condiziona il risultato finale della componente di terzo ordine nell'interazione della funzione di Green. Nel limite di correlazione assente fra le impurezze il risultato è presto ottenuto e ha la forma indicata diagrammaticamente in figura (3.6)

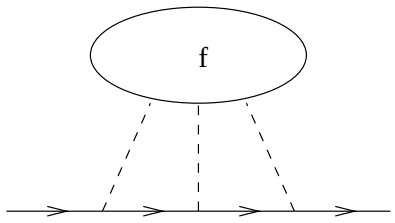


Figura 3.5: *Rappresentazione schematica della funzione di Green calcolata al terzo ordine nell'interazione con l'impurezza. L'ovale rappresenta* $f_3(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)$*; le linee tratteggiate sono i momenti trasferiti alle impurezze. La frequenza si conserva ad ogni interazione mentre solo il momento totale trasferito è nullo.*

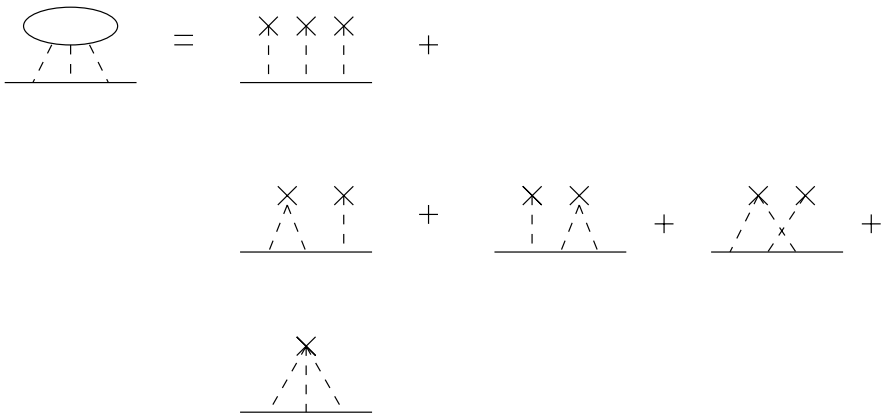


Figura 3.6:

Il quarto contributo è diverso rispetto agli altri perchè in esso le linee di interazione si incrociano. Il terzo ordine di interazione è il più basso ordine in cui si verifica questo fenomeno. Nella risommazione successiva (vedi oltre) questo tipo di contributo verrà trascurato. Tale scelta si può fare in condizione di bassa densità di impurezze ($N/S \to 0$). Se si calcolano infatti i tre contributi alla self-energia che vengono dalla interazione con due sole impurezze (seconda riga figura 3.6), si ottengono due contributi distinti: uno per i termini separabili, un altro per il termine incrociato:

$$\begin{aligned}\text{Termine 1P} - \text{riducibile} &= \frac{N^2}{S^2}\int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} V(0)|V(q)|^2 [G^{(0)}(\boldsymbol{p}, ip_n)]^2 G^{(0)}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, ip_n) \\ \text{Termine incrociato} &= \frac{N^2}{S^2}\int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} V(0)|V(q)|^2 [G^{(0)}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, ip_n)]^2 G^{(0)}(\boldsymbol{p}, ip_n)\end{aligned} \tag{3.37}$$

Un grafico 1P-riducibile è un grafico che diviene sconnesso tagliando una linea qualsiasi che lo costituisce. Poiché la fase del termine incrociato varia con $\boldsymbol{q}$ tra 0 e π mentre solamente tra 0 e $\pi/2$ per il termine 1P-riducibile, si deduce che il termine incrociato è più piccolo a causa dell'interferenza.

Tutti questi ragionamenti sono stati fatti nell'ipotesi che non vi sia alcuna correlazione nella distribuzione delle impurezze. Nel nostro schema ciò corrisponde ad una costante di interazione fra le impurezze infinitesima. In questa approssimazione i contributi di scattering su impurezze sono tutti 1P-riducibili ed è possibile scrivere una equazione di Dyson per la funzione di Green:

$$G(\boldsymbol{p}, ip_n) = \frac{1}{ip_n - \xi_{\boldsymbol{p}} - \Sigma(\boldsymbol{p}, ip_n)} \tag{3.38}$$

dove la self-energia propria $\Sigma(\boldsymbol{p}, ip_m)$ ha la forma:

$$\Sigma(\boldsymbol{p}, ip_m) = \sum_n \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{p}, ip_m) =$$
$$\sum_n \frac{N}{S}\int \frac{\mathrm{d}^2 p_1}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{d}^2 p_2}{(2\pi)^2}\cdots\frac{\mathrm{d}^2 p_{n-1}}{(2\pi)^2} V(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)V(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\ldots V(\boldsymbol{p}_{n-1}-\boldsymbol{p})\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{ip_n - \xi_{\boldsymbol{p}_j}} \tag{3.39}$$

dove $\xi_{\boldsymbol{p}_j} = \epsilon_{\boldsymbol{p}_j} - \mu$ ossia la differenza fra l'energia dell'elettrone di momento $\boldsymbol{p}_j$ e il potenziale chimico.

La figura (3.7) è una rappresentazione diagrammatica della serie che definisce la self-energia propria.

L'equazione di Dyson per la funzione di Green ha la rappresentazione diagrammatica:

La serie che definisce la self-energia a partire dalla self-energia propria è, nello spazio dei momenti, una serie geometrica e quindi facilmente sommabile. Anche

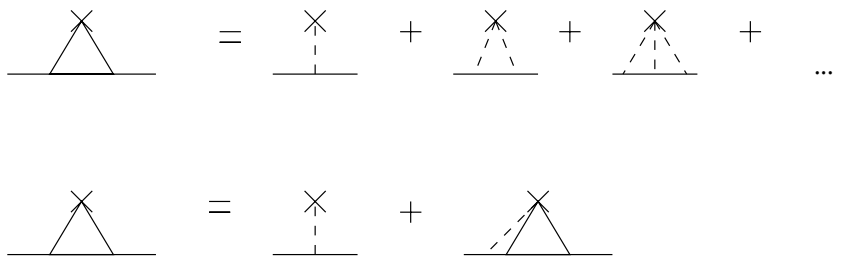


Figura 3.7:

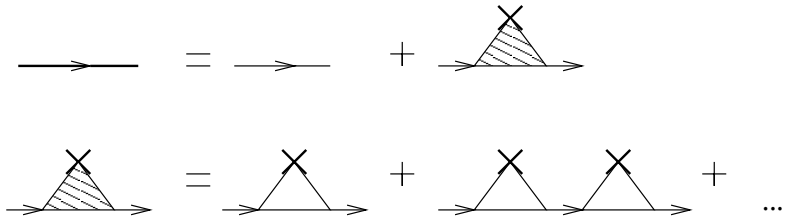


Figura 3.8: *Rappresentazione diagrammatica della equazione di Dyson per la funzione di Green. La linea marcata è la funzione di Green completa, mentre la linea sottile rappresenta la funzione di Green libera. La croce è l'impurezza, il triangolo bianco la self-energia propria, quello tratteggiato la self-energia.*

la serie che definisce la self-energia propria è sommabile, ma comporta un certo lavoro. Si può dimostrare[2] che se vale l'equazione di Schroedinger:

$$H\psi_\lambda = \left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V(r)\right]\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda \tag{3.40}$$

dove $V(r)$ è il potenziale generato da un singola impurezza posta nell'origine, e se definisco:

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}\lambda} = \int \mathrm{d}^2 r e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} V(r)\psi_\lambda(\boldsymbol{r}) \tag{3.41}$$

allora la self-energia propria si scrive (Schwinger-Dyson):

[2] G.Mahan Many-Particle Physics par. 4.1

$$\Sigma(\boldsymbol{p}, ip_m) = \frac{N}{S}V(0) + \frac{N}{S}\sum_{\lambda}\frac{|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}\lambda}|^2}{ip_m + \mu - E_\lambda} \tag{3.42}$$

3.1.3 Scattering su impurezze: correzioni di vertice

La correzione delle funzioni di Green con la self-energia implica la correzione dei vertici. Si assume che gli elettroni in ciascuno dei due strati risenta solo delle "proprie" impurezze, allora la divisione della polarizzazione in funzioni triangolari è ancora possibile, ma vi saranno correzioni di vertice:

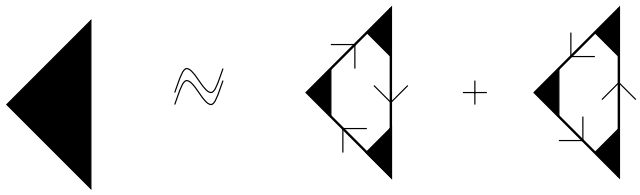


Figura 3.9: *Rappresentazione schemetica della funzione triangolare: si evidenziano le correzioni di vertice e le funzioni di Green "vestite" con la self-energia di scattering.*

Si distinguono due tipi diversi di vertici, a seconda della natura scalare o vettoriale: vi sono vertici di corrente e vertici di carica.

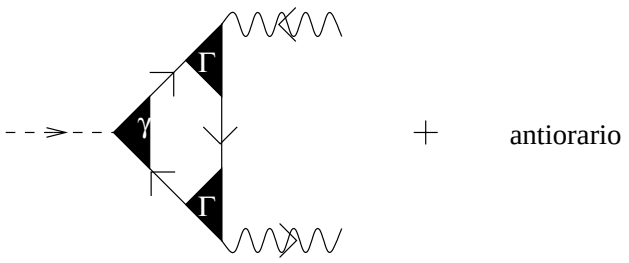


Figura 3.10: *Rappresentazione schemetica della funzione triangolare: si evidenziano le diverse correzioni di vertice: le* Γ *sono vertici di carica, mentre* γ *è un vertice di corrente.*

Tutti i vertici che compaiono nella funzione triangolare sono oggetti a tre gambe delle quali due sono fermioniche. La distinzione tra i due tipi di vertici è fatta sulla

gamba bosonica: in un caso essa è la corrente esterna, nell'altro caso l'interazione fra i layer. In formule:

$$\Delta_1^\alpha(q,q;i\Omega_n+i\omega_m,i\omega_m) = \\ -\frac{2}{mS}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\beta}\sum_l k^\alpha[K(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},ik_l,i\Omega_n,i\omega_m)+K(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{q},ik_l,i\Omega_n,-(i\omega_m+i\Omega_n))] \tag{3.43}$$

dove $\boldsymbol{Q}=0$ e

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},ik_l,i\Omega_n,i\omega_m) = \\ & G(\boldsymbol{k},ik_l)\gamma(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};ik_l,ik_l+i\Omega_n)G(\boldsymbol{k},ik_l+i\Omega_n) \\ & \times\Gamma(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q};ik_l+i\Omega_n,ik_l+i\Omega_n+i\omega_m)G(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},ik_l+i\Omega_n+i\omega_m) \\ & \times\Gamma(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{q};ik_l+i\Omega_n+i\omega_m,ik_l) \end{aligned} \tag{3.44}$$

γ viene detta correzione di vertice di corrente, mentre le due Γ sono correzioni di vertice di carica.

Il primo passo da fare nella valutazione delle Δ è calcolare la somma in frequenze fermioniche ik_l. La tecnica è ancora quella dell'integrazione su particolari cammini nel piano complesso. La struttura delle funzioni di Green ci fa riconoscere diversi tagli dell'integrando che complicano la struttura del cammino di integrazione. Dopo aver eseguito l'integrazione dobbiamo porre $i\Omega_n+i\omega_m\to\Omega+\omega+i\delta$, $i\Omega_n\to\Omega+i\delta$ e $i\omega_m\to-i\delta$. Con calcoli lunghi ma semplici si ottiene il risultato:

$$\Delta^\alpha(+,-)\equiv\Delta^\alpha(\boldsymbol{q},\Omega+\omega+i\delta,\omega-i\delta) = \\ \frac{2}{Sm}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi i}n_F(\epsilon)k^\alpha\{K(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},\epsilon,\Omega,\omega)+K(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{q},\epsilon,\Omega,-(\omega+\Omega))\} \tag{3.45}$$

Nell'integrando è chiaramente contenuta tutta la complessità del problema:

$$
\begin{aligned}
K(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},\epsilon,\Omega,\omega) = \\
& G^r(\boldsymbol{k},\epsilon+\Omega)\Gamma_{++}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon+\Omega,\epsilon+\omega+\Omega)G^r(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega+\Omega) \\
& \times\{\Gamma_{++}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\epsilon+\omega+\Omega,\epsilon)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon)\gamma_{++}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon+\Omega) \\
& -\Gamma_{+-}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\epsilon+\omega+\Omega,\epsilon)G^a(\boldsymbol{k},\epsilon)\gamma_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon+\Omega)\} \\
& +G^a(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega)\Gamma_{--}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\epsilon+\omega,\epsilon-\Omega)G^a(\boldsymbol{k},\epsilon-\Omega) \\
& \times\{\gamma_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\epsilon-\Omega,\epsilon)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon)\Gamma_{+-}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q};\epsilon,\epsilon+\omega) \\
& -\gamma_{--}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\epsilon-\Omega,\epsilon)G^a(\boldsymbol{k},\epsilon)\Gamma_{--}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q};\epsilon,\epsilon+\omega)\} \\
& +G^a(\boldsymbol{k},\epsilon-\omega-\Omega)\gamma_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\epsilon-\omega-\Omega,\epsilon-\omega)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon-\omega) \\
& \times\{\Gamma_{++}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon-\omega,\epsilon)G^r(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon)\Gamma_{+-}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon-\omega-\Omega) \\
& -\Gamma_{+-}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon-\omega,\epsilon)G^a(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon)\Gamma_{--}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon-\omega-\Omega)\}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Le funzioni Δ appena calcolate entrano nella conducibilità di drag che, dal prolungamento analitico della (3.11) si scrive:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{12}^{\alpha\beta} =& \frac{e_1 e_2}{2S}\sum_{\boldsymbol{q}}\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|U_{\mathrm{C}}(q)|^2\left(-\frac{\partial n_B(\omega)}{\partial\omega}\right) \\
& \times\Delta_1^\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\omega+i\eta,\omega-i\eta)\Delta_2^\beta(-\boldsymbol{q},-\boldsymbol{q},-\omega-i\eta,-\omega+i\eta)
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

L'espressione ottenuta per la conducibilità di drag è ancora abbastanza generale e soprattutto è abbastanza oscura. Non sono chiari ad esempio i nessi con la corrispondente espressione classica. Appunto per questo motivo si rivela utile la valutazione della funzione fondamentale $K(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},\epsilon,\Omega,\omega)$ –ossia delle correzioni di vertice– nel caso limite balistico (o di Boltzmann).

3.1.4 Limite di Boltzmann

Il limite di Boltzmann si caratterizza quantitativamente attraverso due condizioni:

$$
\begin{aligned}
\omega\tau &> 1 \\
Dq^2\tau &> 1
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

ω e q sono rispettivamente l'energia e il momento (in unità $\hbar$) trasferiti da un layer all'altro attraverso l'interazione coulombiana che innesca il fenomeno di drag studiato. D e τ invece sono parametri caratteristici del materiale e sono legati alla diffusione degli elettroni sulle impurezze. D e τ vengono detti costante di diffusione e tempo di rilassamento del sistema. Classicamente posso veder emergere entrambe queste costanti dall'equazione del trasporto di Boltzmann. Per un sistema stazionario in approssimazione di tempo di rilassamento (RTA) essa si scrive:

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f + \boldsymbol{F} \cdot \nabla_{\boldsymbol{k}} f = -\frac{f - f_0}{\tau} \tag{3.49}$$

dove a moltiplicare il gradiente di posizione c'è la velocità dell'elettrone, mentre il gradiente sui momenti è preceduto dalla risultante di tutte le forze agenti tranne quelle dissipative. Si può dimostrare [9] con una generalizzazione del metodo utilizzato nella sezione dedicata all'equazione di Boltzmann che la soluzione ha la forma:

$$f = f_0 - e\tau \frac{\boldsymbol{\mathcal{F}} + (e\tau/m^*)(\boldsymbol{\mathcal{F}} \times \boldsymbol{B}) + (e\tau/m^*)^2(\boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}}{1 + (e\tau/m^*)^2|\boldsymbol{B}|^2 \cdot \nabla_{\boldsymbol{k}}} f_0 \tag{3.50}$$

dove e è la carica dell'elettrone da intendersi con il suo segno. Si è introdotto il vettore:

$$e\boldsymbol{\mathcal{F}} = e\boldsymbol{E} - T\nabla_{\boldsymbol{r}} \left(\frac{\epsilon - \mu}{k_B T} \right) \tag{3.51}$$

detto *campo elettrotermico*.

La densità di corrente è definita come $\boldsymbol{j} \equiv en\langle \boldsymbol{v} \rangle$ dove il valor medio è condotto a partire dalla distribuzione soluzione della equazione di Boltzmann. Per semplicità ci porremo ora in assenza di campi magnetici o gradienti termici. Sotto queste ipotesi la densità di corrente si scrive:

$$\boldsymbol{j} \equiv \frac{ne^2}{m^*} \langle \tau \boldsymbol{\mathcal{F}} \rangle \tag{3.52}$$

dove per valor medio si intende:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j} =& en\frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})} = en\frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r}[f_0 - e\tau\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{k}} f_0]\boldsymbol{v}}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r}[f_0 - e\tau\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{k}} f_0]} \approx \\ & - e^2 n\frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\tau(\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{k}} f_0)\boldsymbol{v}}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r} f_0} = -e^2 n\frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v}\tau\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\boldsymbol{v})}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r} f_0} = \\ & e^2 n\frac{1}{3}\frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v}\tau\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\right)|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{\mathcal{F}}}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r} f_0} = e^2 n\frac{2}{3m^*}\frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_0^\infty \mathrm{d}x\tau\left(-\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)x^{3/2}\boldsymbol{\mathcal{F}}}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_0^\infty \mathrm{d}x x^{1/2} f_0} \equiv \frac{ne^2}{m^*}\langle\tau\boldsymbol{\mathcal{F}}\rangle\end{aligned} \tag{3.53}$$

Ma se si assume il potenziale chimico lineare nelle posizioni e il campo magnetico uniforme, si semplifica la scrittura in:

$$\boldsymbol{j} = \frac{ne^2}{m^*}\langle\tau\rangle\boldsymbol{E} - \frac{ne}{m^*}\langle\tau\rangle\nabla_{\boldsymbol{r}}\mu \tag{3.54}$$

Ci si riferisce al primo come al termine di drift mentre al secondo come al termine di diffusione. Il gradiente del potenziale chimico si può esprimere in funzione del gradiente di concentrazione:

$$\nabla_{\boldsymbol{r}}\mu = k_B T\frac{F_{1/2}(\eta)}{F_{-1/2}(\eta)}\nabla_{\boldsymbol{r}} n \tag{3.55}$$

dove $\eta = \beta(E_0 - E_F)$ e

$$F_j(\eta) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{x^j}{1+e^{x+\eta}} \tag{3.56}$$

In definitiva, utilizzando anche la definizione di mobilità (μ_n):

$$\boldsymbol{j} = -en\mu_n\boldsymbol{E} + k_B T\mu_n\frac{F_{1/2}(\eta)}{F_{-1/2}(\eta)}\nabla_{\boldsymbol{r}} n \tag{3.57}$$

per una energia di Fermi nel gap di banda e lontana dal bordo della banda di almeno $4k_B T$ si può definire quindi un coefficiente di diffusione:

$$D = \frac{k_B T\mu_n}{|e|} \tag{3.58}$$

La condizione di limite di Boltzmann si riduce quindi a :

$$Dq^2\tau = \frac{k_B T \mu_n}{|e|} q^2 \tau = \frac{k_B T q^2 \tau^2}{m*} \tag{3.59}$$

Poichè $k_B T/m^*$ è il quadrato della velocità termica, il limite di Boltzmann si può scrivere:

$$\left(\frac{\lambda_T}{\lambda}\right)^2 > 1 \tag{3.60}$$

dove si è introdotta la lunghezza d'onda termica $\lambda_T = v_T \tau$. λ è invece la lunghezza d'onda tipica della interazione. Le distanze su cui agisce l'interazione con l'altro layer sono piccole rispetto al libero cammino medio: questo si spiega nel limite di impurezze rade come ritroveremo più avanti. Sapendo che il potenziale di interazione ha una lunghezza tipica di azione dell'ordine della distanza fra i layer[3] (d) e che il libero cammino medio è dell'ordine della distanza fra le impurezze, possiamo affermare anche che quest'ultima è maggiore della distanza fra i layer.

La condizione $\omega\tau > 1$ rispecchia il fatto che i tempi di interazione tra i due layer sono più brevi dei tempi di rilassamento in ciascun layer. Le due condizioni si riflettono in una notevole semplificazione della nosra funzione K. Innanzitutto si dimostra che non appena q e ω si discostano dall'origine le correzioni di vertice di carica sono sostanzialmente nulle ossia il vertice è 1.

La correzione di vertice di carica soddisfa una equazione integrale che si scrive in diagrammi:

Questo perchè la si assume calcolata in ladder approximation nell'interazione a losanga. Quest'ultima non è altro che l'abbreviazione per:

Quanto detto con i diagrammi si esprime in formule (per una particolare correzione di vertice):

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{+,-}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, \epsilon, \epsilon+\omega) = \\
&\quad 1 + \frac{N}{S^2} \sum_{\boldsymbol{p}} T_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}}(\epsilon) T_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}(\epsilon+\omega) G^r(\boldsymbol{p}, \epsilon) \\
&\qquad\qquad G^a(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \epsilon+\omega) \Gamma_{+,-}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \epsilon, \epsilon+\omega)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

[3]per una dimostrazione vedi le sezioni dedicate al potenziale efficace di interazione.

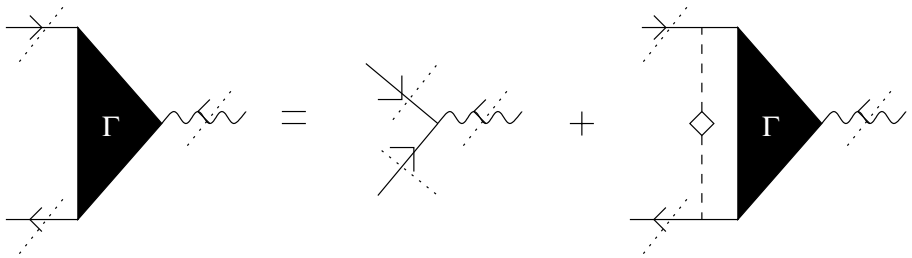


Figura 3.11: *Rappresentazione schematica dell'equazione integrale che definisce il vertice di carica. Si nota in perticolare l'interazione con le impurezze rappresentata con la losanga.*

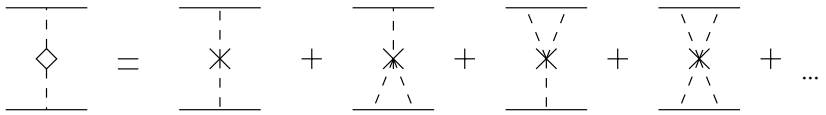


Figura 3.12: *Rappresentazione schematica dell'interazione a losanga: l'interazione a losanga non è altro che il prodotto di due interazioni di vertice sui due rami uscenti della correzione di vertice.*

dove i segni a pedice delle Γ si riferiscono al segno delle parti immaginarie delle fraquenze.

Il limite di Boltzmann si può far corrispondere al limite per impurezze rade, infatti la self-energia è proporzionale alla densità di impurezze e la parte immaginaria di quest'ultima è l'inverso del tempo di rilassamento. Qualitativamente si fa rientrare in tale limite anche la grande mobilità dei campioni ovvero il grande coefficiente di diffusione. Più avanti si vedrà come tale definizione del limite sia perfettamente coerente con quella originaria. La correzione di vertice di carica risente di tale limite. L'equazione scritta sopra che la definisce è ricorsiva. A prima vista il vertice $\Gamma_{+,-}$ risulta definito in essa come una espansione in potenze successive della densità di impurezze. Tuttavia non è così perchè le funzioni di Green contengono a denominatore la self-energia che è proporzionale alla densità di impurezze. Consideriamo per fissare le idee il primo termine dello sviluppo ottenuto sostituendo a $\Gamma_{+,-}$ l'unità nel membro di destra. Il prodotto delle funzioni di Green si può scrivere:

$$G^r(\boldsymbol{p},\epsilon)G^a(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega) = \frac{1}{(x+i\Delta)(x'-i\Delta')} \tag{3.62}$$

dove

$$\begin{aligned} x &= \epsilon - \xi_{\boldsymbol{p}} - \Re\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon) \\ x' &= \epsilon + \omega - \xi_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}} - \Re\Sigma(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega) \\ \Delta &= \Im\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon) \\ \Delta' &= \Im\Sigma(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega) \end{aligned} \tag{3.63}$$

Il limite di impurezze rade ($N/S \to 0$)si esegue subito e si ottiene:

$$\begin{aligned} &G^r(\boldsymbol{p},\epsilon)G^a(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega) = \\ &\frac{1}{x^2+\Delta^2+(x+i\Delta)[(x'-x)-i(\Delta'-\Delta)]} \to \frac{1}{x(x+\delta x)} \end{aligned} \tag{3.64}$$

dove

$$\delta x = \omega + \frac{|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}|^2 - |\boldsymbol{p}|^2}{2m^*} = \omega + \frac{q^2}{2m^*} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{m^*} \tag{3.65}$$

Il risultato di questo limite non dipende dai segni a pedice del vertice: è cruciale però che gli argomenti delle due funzioni di Green siano diversi. A qusto punto si vede che la somma su momento interno è convergente: all'infinito grazie alle matrici $\boldsymbol{T}$ che non sono altro che trasformate di Fourier di potenziali a breve range e continuano dunque a godere di tale proprietà. Al finito dal momento che la divergenza quadratica nelle energie si separa in due poli distinti. Tutto questo assicura, iterando il ragionamento per gli ordini successivi, che il vertice di carica tenda a 1 in approssimazione di Boltzmann. Tutto il ragionamento riposa sul fatto che $\delta x \neq 0, \quad \forall \boldsymbol{p}$. In realtà questo non è rigorosamente vero perchè nel calcolo della conducibilità si integra sulle variabili $\boldsymbol{q}, \omega$. Inoltre non è nemmeno rigorosamente vero che la densità di impurezze sia infinitesima. La condizione più precisa è quella secondo la quale:

$$\omega + \frac{q^2}{2m^*} = \min_{\boldsymbol{p}}(\delta x) > 2\Delta = \frac{1}{\tau} \tag{3.66}$$

ossia, leggendo il primo e l'ultimo termine, l'originaria condizione di Boltzmann. Nella integrazione si considererà irrilevante il contributo derivante dalla regione di spazio definita dalla disuguaglianza. I vertici di corrente si trovano in una situazione ben diversa, pur essendo definiti da una equazione di ricorrenza del tutto simile a quella scritta per i vertici di carica. Questo proprio perchè gli argomenti delle funzioni di Green là presenti differiscono del momento e dell'energia associati al campo esterno. Questi sono presi nel limite infinitesimo per calcolare la conducibilità del campione in corrente continua. Perciò, sebbene la struttura del vertice sia sostanzialmente la stessa, il vertice di corrente deve essere calcolato e fornisce un contributo essenziale alla conducibilità.

Ciscuna funzione triangolare è costituita da tre vertici e tre propagatori fermionici vestiti dallo scattering sulle impurezze. Nel limite di corrente continua in ciascuno dei dodici addendi che compongono la funzione triangolare (6 per l'oraria e 6 per l'antioraria)compare il prodotto di due funzioni di Green calcolate nel medesimo punto. Gli addendi caratterizzati da fattori del tipo G^aG^a oppure G^rG^r però, sono molto più piccoli, nel limite di Boltzmann dei corrispondenti termini G^rG^a e di conseguenza al nostro livello di approssimazione vengono trascurati. Il motivo va ricercato ancora nel diverso grado di divergenza:

$$\begin{aligned}
G^r(\boldsymbol{k},\epsilon)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon) &= \frac{1}{(x+i\Delta)(x+i\Delta)} = \\
&\frac{x^2-\Delta^2-2ix\Delta}{(x^2+\Delta^2)^2} = \frac{1}{x^2+\Delta^2} - \frac{2\Delta^2}{(x^2+\Delta^2)^2} - \frac{2ix\Delta}{(x^2+\Delta^2)^2} \\
G^a(\boldsymbol{k},\epsilon)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon) &= \frac{1}{(x-i\Delta)(x+i\Delta)} = \\
&\frac{1}{x^2+\Delta^2} = \left(\frac{1}{x-i\Delta} - \frac{1}{x+i\Delta}\right)\frac{1}{2i\Delta} \\
G^a(\boldsymbol{k},\epsilon)G^a(\boldsymbol{k},\epsilon) &= \frac{1}{(x-i\Delta)(x-i\Delta)} = \\
&\frac{x^2-\Delta^2+2ix\Delta}{(x^2+\Delta^2)^2} = \frac{1}{x^2+\Delta^2} - \frac{2\Delta^2}{(x^2+\Delta^2)^2} + \frac{2ix\Delta}{(x^2+\Delta^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Fin qui pura algebra. Ora bisogna eseguire il limite di Boltzmann. Per fare ciò si considerino gli integrali:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \frac{2\Delta}{x^2+\Delta^2} &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \left(\frac{2\Delta}{x^2+\Delta^2}\right)^2 &= \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \tag{3.68}$$

che suggeriscono l'identificazione

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta}{x^2+\Delta^2} &= 2\pi\delta(x) \\ \left(\frac{2\Delta}{x^2+\Delta^2}\right)^2 &= \frac{2\pi\delta(x)}{\Delta} \end{aligned} \tag{3.69}$$

nel limite $\Delta \to 0$. Con queste identificazioni si dimostra immediatamente che nell'equazione (3.67) il primo e l'ultimo prodotto si annullano. Il prodotto $G^a G^r$, invece, ricordando le formule di Sockoskji dà come risultato:

$$G^a(\boldsymbol{k},\epsilon)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon) \to \frac{2\pi\delta(x)}{\Delta} \tag{3.70}$$

Questo risultato si capisce anche alla luce dell'identità per la densità spettrale $A(\boldsymbol{k},\epsilon) \equiv -2\Im G^r(\boldsymbol{k},\epsilon)$ e dell'osservazione che nel caso libero $A^{(0)}(\boldsymbol{k},\epsilon) = 2\pi\delta(\epsilon - \xi_{\boldsymbol{k}})$. Con le semplificazioni date dalle osservazioni precedenti:

$$\begin{aligned} &K^B(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},\epsilon,0,\omega) = \\ &\gamma_{-,+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};\epsilon_{\boldsymbol{k}},\epsilon_{\boldsymbol{k}})\big\{G^a(\boldsymbol{k},\epsilon)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon)[G^a(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega) - G^r(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega)] \\ &+ G^a(\boldsymbol{k},\epsilon-\omega)G^r(\boldsymbol{k},\epsilon-\omega)[G^r(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon) - G^a(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon)]\big\} \end{aligned} \tag{3.71}$$

Si tratta ora di valutare il vertice di corrente. Sapendo che nella sua interezza il vertice si scrive

$$\boldsymbol{\Gamma}_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon) = \boldsymbol{k} + \frac{N}{S^2}\sum_{\boldsymbol{k}'} |T_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}(\epsilon)|^2 G^r(\boldsymbol{k}',\epsilon)G^a(\boldsymbol{k}',\epsilon)\boldsymbol{\Gamma}_{-+}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}';\epsilon,\epsilon) \tag{3.72}$$

e che necessariamente $\boldsymbol{\Gamma}_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon) = \boldsymbol{k}\gamma_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon)$, si può scrivere una equazione integrale per la parte scalare del vertice:

$$\gamma_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k};\epsilon,\epsilon) = 1 + \frac{N}{S^2}\sum_{\boldsymbol{k'}} |T_{\boldsymbol{kk'}}(\epsilon)|^2 \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k'}}{k^2} G^r(\boldsymbol{k'},\epsilon) G^a(\boldsymbol{k'},\epsilon)\gamma_{-+}(\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k'};\epsilon,\epsilon) =$$
$$1 + \frac{N}{S^2}\sum_{\boldsymbol{k'}} |T_{\boldsymbol{kk'}}(\epsilon)|^2 \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k'}}{k^2} \frac{2\pi\delta(\epsilon-\xi_{\boldsymbol{k'}})}{\Delta}\gamma_{-+}(\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k'};\xi_{\boldsymbol{k'}},\xi_{\boldsymbol{k'}}) \tag{3.73}$$

Ma, essendo le impurezze isolate e incapaci di assorbire energia, $|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k'}|$ e quindi $\xi_{\boldsymbol{k}} = \xi_{\boldsymbol{k'}}$ ovunque. Oltre a questo faccio anche l'ipotesi di isotropia dei tempi di rilassamento ossia $\tau(\boldsymbol{k}) = \tau(k)$ e ciò si riflette anche sul vertice di carica. L'equazione integrale diviene algebrica:

$$\begin{aligned}\gamma_{-+}(k) =& 1 + \frac{N}{S^2}\sum_{\boldsymbol{k'}} |T_{\boldsymbol{kk'}}(\epsilon_k)|^2 \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k'}}{k^2} \frac{2\pi\delta(\epsilon-\xi_{\boldsymbol{k'}})}{\Delta(k)}\gamma_{-+}(k) \\ =& 1 + \frac{N}{S^2\Delta(k)}\sum_{\boldsymbol{k'}} |T_{\boldsymbol{kk'}}(\epsilon_k)|^2 \left[1 - 1 + \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k'}}{k^2}\right] 2\pi\delta(\epsilon-\xi_{\boldsymbol{k'}})\gamma_{-+}(k) \\ =& 1 + \gamma_{-+}(k)\left(1 - \frac{\Delta_T(k)}{\Delta(k)}\right)\end{aligned} \tag{3.74}$$

dove

$$\Delta_T(k) \equiv \frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{k'}} |T_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}}|^2 \left(1 - \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k'}}{k^2}\right) 2\pi\delta(\epsilon-\xi_{\boldsymbol{k'}}) \tag{3.75}$$

L'equazione si risolve facilmente e dà come risultato:

$$\gamma_{-+}(k) = \frac{\Delta(k)}{\Delta_T(k)} = \frac{\tau_{tr}(k)}{\tau(k)} \tag{3.76}$$

dove si è indicato il tempo di rilassamento del materiale pesato sugli angoli di scattering con τ_{tr} ove il pedice indica trasporto a sottolineare che a questo si farà riferimento per confrontare la teoria con i dati sperimentali. E' interessante notare il fattore $1 - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k'}/k^2)$ che, essendo i due momenti di modulo uguale non è altro che $1 - \cos\theta'$. Questo è un fattore importante che è presente anche nella teoria semiclassica di Boltzmann e deprime nel conteggio del "vero" tempo di rilassamento lo scattering ad angoli piccoli privilegiando quello con grandi deviazioni angolari.

L'ipotesi della correzione isotropa si rivela plausibile perchè si riconduce all'isotropia di osservabili fisiche precise necessariamente legate all'isotropia del campione quali i tempi di rilassamento. Utilizzando anche le identità:

$$\begin{aligned} G^r(\boldsymbol{k},\epsilon)G^a(\boldsymbol{k},\epsilon) &= \tau(k)A(\boldsymbol{k},\epsilon) \\ G^r(\boldsymbol{k},\epsilon) - G^a(\boldsymbol{k},\epsilon) &= -A(\boldsymbol{k},\epsilon) \end{aligned} \tag{3.77}$$

posso finalmente semplificare l'espressione della funzione triangolare e ottenere:

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\omega+i\delta,\omega-i\delta) = \frac{2}{Sm^*} - \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi} n_F(\epsilon) k^\alpha \tau_{tr}(k) \\ \times\big\{A(\boldsymbol{k},\epsilon)[A(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\epsilon-\omega)+A(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega)] - \\ A(\boldsymbol{k},\epsilon+\omega)A(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\epsilon) - A(\boldsymbol{k},\epsilon-\omega)A(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon)\big\} \end{aligned} \tag{3.78}$$

e, traslando gli integrali:

$$\begin{aligned} &\Delta^\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\omega+i\delta,\omega-i\delta) = \\ &\frac{2}{Sm^*}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi}(n_F(\epsilon+\omega)-n_F(\epsilon))[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})^\alpha \tau_{tr}(|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}|) - (\boldsymbol{k})^\alpha \tau_{tr}(|\boldsymbol{k}|)] \\ &\qquad A(\boldsymbol{k},\epsilon)A(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\epsilon+\omega) \end{aligned} \tag{3.79}$$

Ultimo passo è quello di riconoscere che le funzioni spettrali sono deltiformi e si arriva alla conclusione:

$$\Delta^\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\omega+i\delta,\omega-i\delta) = \frac{2\bar{\tau}_{tr}}{m^*} F^\alpha(\boldsymbol{q},\omega) \tag{3.80}$$

dove

$$F^\alpha(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{2}{S\bar{\tau}_{tr}} \Im \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}})}{\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}} - \omega - i\delta} \times [(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})^\alpha \tau_{tr}(|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}|) - (\boldsymbol{k})^\alpha \tau_{tr}(|\boldsymbol{k}|)] \tag{3.81}$$

e per definizione il tempo di trasporto medio è quello che compare nella definizione di conducibilità intralayer:

$$\sigma_{ii} = \frac{e_i^2 n_i \bar{\tau}_{tr,i}}{m_i^*} \tag{3.82}$$

Se il tempo di rilassamento è indipendente dall'energia, si recupera esattamente la formula di Boltzmann semiclassica e si ha l'identificazione:

$$F^\alpha(\boldsymbol{q}, \omega) = q^\alpha \Im \chi_0(\boldsymbol{q}, \omega) \tag{3.83}$$

In ogni caso vale la formula più generale:

$$\rho_{21}^{xx} = -\frac{\sigma_{21}^{xx}}{\sigma_{11}^{xx}\sigma_{22}^{xx}} = \frac{e_1 e_2}{n_1 n_2 4\pi S} \sum_{\boldsymbol{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega F_2^x(\boldsymbol{q}, \omega) F_1^x(\boldsymbol{q}, \omega) |U_{sc}|^2 \frac{1}{\mathrm{Sh}^2(\beta\omega/2)} \tag{3.84}$$

Per l'introduzione del potenziale efficace schermato U_{sc} si rimanda all'ultima sezione di questo capitolo.

3.2 Resistività di drag: deduzione quantistica con $\boldsymbol{B} \neq 0$

La presenza di un forte campo magnetico ortogonale al piano in cui sono vincolati gli elettroni modifica profondamente il calcolo della conducibilità di drag: la motivazione non va tuttavia ricercata nella formula di Kubo che rimane invariata nella sua formulazione astratta, bensì nel calcolo esplicito delle funzioni triangolari che risente invece della discretizzazione dello spettro introdotta dal campo magnetico. Ricordo l'espressione generale della conducibilità di drag affinchè sia chiaro lo scopo del lavoro:

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{\alpha\beta} =& \frac{e_1 e_2}{2S} \sum_{\boldsymbol{q}} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} |U_{\mathrm{C}}(q)|^2 \left(-\frac{\partial n_B(\omega)}{\partial \omega} \right) \\ & \times \Delta_1^{\alpha}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}, \omega + i\eta, \omega - i\eta) \Delta_2^{\beta}(-\boldsymbol{q}, -\boldsymbol{q}, -\omega - i\eta, -\omega + i\eta)\end{aligned} \tag{3.85}$$

dove $\eta \to 0^+$, S è l'area del layer, e $U_{\mathrm{C}}(q)$ è l'interazione Coulombiana fra i layer. Gli ordini successivi al secondo nell'interazione di Coulomb porteranno ad una correzione del potenziale schermandolo con una costante dielettrica efficace come è discusso nella sezione dedicata al potenziale efficace di interazione.

3.2.1 Funzione triangolare e livelli di Landau

La hamiltoniana libera di un sistema di elettroni inseriti in un campo magnetico si scrive:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2 \tag{3.86}$$

dove si è già inserita la massa efficace di banda m^* e il potenziale vettore $\boldsymbol{A}$ si assume nella gauge di Landau:

$$\boldsymbol{A} = (0,\, Bx,\, 0) \tag{3.87}$$

La soluzione dell'equazione di Schroedinger per la particella libera si può ottenere fattorizzando la funzione d'onda nelle due componenti $\psi(x, y) = f(x)g(y)$.

L'invarianza traslazionale della hamiltoniana in direzione $\hat{y}$ suggerisce di dare alla $g(y)$ la forma di un fattore di fase riducendo l'equazione agli autovalori ad un problema monodimensionale. Il problema monodimensionale che consente di ricostruire la $f(x)$ è l'equazione di un oscillatore armonico. In sostanza gli autostati della hamiltoniana libera risultano definiti da due autovalori: $|N\rangle = |n, k\rangle$. Le autofunzioni e gli autovalori dell'energia sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \langle x, y|n, k\rangle &= \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} H_n\left(\frac{x}{l} - kl\right) \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l} - kl\right)^2\right]}{\sqrt{2^n n!\, l\sqrt{\pi}}} \\ \epsilon_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \end{aligned} \tag{3.88}$$

dove $H_n(x)$ sono i polinomi di Hermite che fanno parte della soluzione dell'oscillatore armonico monodimensionale, $l = \sqrt{\hbar c/eB}$ è la lunghezza d'onda magnetica che definisce la dimensione del supporto della funzione d'onda in direzione $\hat{x}$. Quando la densità elettronica è tale da poter affermare che $l \ll (\rho_{el})^{-1/2}$ la approssimazione di elettroni non interagenti è buona. Si capisce quindi che essa è tanto migliore quanto più intenso è il campo magnetico. Gli autovalori dell'energia dipendono solamente dall'indice n del livello di Landau : i livelli energetici sono quindi fortemente degeneri. La separazione tra i vari livelli energetici è uniforme e direttamente proporzionale al campo magnetico applicato attraverso la frequenza di ciclotrone. Al crescere del campo magnetico la discretizzazione quantistica dei livelli si fa sempre più evidente. La degenerazione perfetta dei livelli è legata alla dimensione laterale del campione: gli autovalori dell'energia sono rigorosamente degeneri solamente per campioni infiniti.

In seconda quantizzazione utilizzeremo il sistema di creatori e distruttori di autostati dell'energia per definire gli operatori densità e corrente necessari al calcolo della funzione triangolare. Il correlatore corrente-densità-densità (detto anche funzione triangolare) è definito:

$$\Delta_i^\alpha(\boldsymbol{x}\tau, \boldsymbol{x'}\tau', \boldsymbol{x''}\tau'') = -\langle T_\tau\{j_i^\alpha(\boldsymbol{x}, \tau)\rho_i(\boldsymbol{x'}, \tau')\rho_i(\boldsymbol{x''}, \tau'')\}\rangle \tag{3.89}$$

dove l'apice α si riferisce alla componente del vettore corrente, mentre il pedice i riguarda il layer considerato.

Se N è il numero quantico che definisce lo stato dell'elettrone in prima quantizzazione allora in seconda quantizzazione definisco l'operatore densità:

$$\rho(\boldsymbol{x'},\tau) = \frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{q},N,M} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x'}} C_N^\dagger(\tau)\langle N|e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}|M\rangle C_M(\tau) \tag{3.90}$$

e l'operatore corrente:

$$\boldsymbol{j}(\tau) = \frac{l\omega_c}{S}\sum_N \left(\boldsymbol{w}_1\sqrt{n+1}C_{N+1}^\dagger(\tau)C_N(\tau) + \boldsymbol{w}_2\sqrt{n}C_{N-1}^\dagger(\tau)C_N(\tau)\right) \tag{3.91}$$

dove abbiamo definito i due vettori $\boldsymbol{w}_1 = (i\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}})/\sqrt{2}$ e $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1^* = (-i\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}})/\sqrt{2}$ con $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ versori che definiscono i piani degli strati di elettroni.

La rappresentazione dell'operatore densità si ottiene immediatamente dalla definizione di operatore di singola particella in seconda quantizzazione: la densità in prima quantizzazione si scrive $\rho(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}+\hat{\boldsymbol{r}})$. Una trasformazione di Fourier fornisce la 3.90.

L'operatore corrente presenta delle caratteristiche legate più strettamente al sistema di elettroni che stiamo studiando. La corrente è proporzionale al momento meccanico: in quest'ultimo compaiono il momento canonico e la posizione tramite il potenziale vettore. Ricordando la relazione fra operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico e operatori posizione e momento canonico:

$$\begin{aligned} a &= \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\mathfrak{p} - im\omega\mathfrak{q}) \\ a^\dagger &= \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\mathfrak{p} + im\omega\mathfrak{q}) \end{aligned} \tag{3.92}$$

si spiega facilmente perchè l'operatore corrente sia strettamente fuori diagonale negli indici di Landau. Anche l'origine dei vettori $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ è da ricercare nella sostituzione suggerita dalla 3.92. Le radici quadrate presenti nella 3.91 si ottengono dai fattori di normalizzazione che accompagnano l'azione di un creatore o di un distruttore su uno stato di oscillatore armonico definito dal numero quantico n.

Quando i due operatori densità e l'operatore corrente vengono inseriti nella media sull'ensemble grancanonico il teorema di Wick permette di effettuare tre

contrazioni fra i sei operatori di creazione e distruzione e ottenere il loop che definisce la funzione triangolare: essa è costituita dalla somma di due termini (orario e antiorario) ciascuno dei quali costituito da 3 funzioni di Green, due vertici di carica e uno di corrente.

In assenza di impurezze i vertici della funzione triangolare sono nudi e le funzioni di Green sono libere.

Un esempio di funzione di Green libera frutto della contrazione di un operatore di creazione e di uno di distruzione è:

$$\langle T_\tau\{C_N^\dagger(\tau)C_M(\tau')\}\rangle = \delta_{mn}\delta(k-p)\sum_j e^{-i\omega_j(\tau-\tau')}\frac{1}{i\omega_j-(n+1/2)\omega_c} \tag{3.93}$$

Il vertice di corrente nudo è descritto dalla semplice espressione:

$$\boldsymbol{\gamma}^0_{NM} = \frac{l\omega_c}{S}\delta(k-p)(\boldsymbol{w}_1\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}+\boldsymbol{w}_2\sqrt{n}\delta_{m,n-1}) \tag{3.94}$$

nella quale la particolare forma dgli autostati di Landau non appare, ma si legge solamente che il vertice connette stati di Landau adiacenti.

Il vertice di carica presenta la struttura più articolata. La sua componenente fondamentale è l'elemento di matrice $\langle N|e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}|M\rangle$[4].

$$\begin{aligned}
&\langle n,k|e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}|m,p\rangle = \\
&\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}}H_n\left(\frac{x}{l}-kl\right)\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}-kl\right)^2\right]}{\sqrt{2^n n!\, l\sqrt{\pi}}} \\
&\times e^{iq_x x+iq_y y} \\
&\times\frac{e^{ipy}}{\sqrt{2\pi}}H_m\left(\frac{x}{l}-pl\right)\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}-pl\right)^2\right]}{\sqrt{2^n n!\, l\sqrt{\pi}}} = \\
&\frac{\delta(p+q_y-k)}{\sqrt{2^{n+m}n!m!\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{l}H_n\left(\frac{x}{l}-kl\right)H_m\left(\frac{x}{l}-pl\right) \\
&\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{l}-kl\right)^2+\left(\frac{x}{l}-pl\right)^2\right]+iq_x x\right\}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

[4] L'analisi dettagliata di questo elemento di matrice è giustificata dal ruolo chiave svolto anche nella definizione delle correzioni di vertice dovute allo scattering su impurezze.

Se si completa il quadrato nell'argomento dell'esponenziale e si introduce la variabile di integrazione adimensionale:

$$\xi = \frac{x}{l} - \frac{l}{2}(k + p + iq_x) \tag{3.96}$$

l'elemento di matrice prende la forma:

$$\begin{aligned}
&\langle n, k|e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}|m, p\rangle = \\
&\quad \frac{\delta(p + q_y - k)}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi H_n \left(\xi + \frac{l}{2}(k + p + iq_x) - kl\right) \\
&\quad \times H_m \left(\xi + \frac{l}{2}(k + p + iq_x) - pl\right) \exp\left[-\xi^2 - \frac{l^2 q^2}{4} + \frac{l^2 2iq_x(k + p)}{4}\right] = \\
&\quad \frac{\delta(p + q_y - k)}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi H_n \left(\xi + \frac{l}{2}(q_y + iq_x)\right) \\
&\quad \times H_m \left(\xi + \frac{l}{2}(-q_y + iq_x)\right) \exp\left[-\xi^2 - \frac{l^2 q^2}{4} + \frac{l^2 2iq_x(k + p)}{4}\right]
\end{aligned} \tag{3.97}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la delta di conservazione della componente y del momento. L'integrale ottenuto è un integrale notevole che connette i polinomi di Hermite ai polinomi associati di Laguerre. Ma la caratteristica peculiare di questo risultato è che l'elemento di matrice calcolato può essere fattorizzato in una funzione dipendente solamente dai livelli di Landau m, n e dal momento $\boldsymbol{q}$ e in un fattore di fase in cui compaiono i momenti k e p che, con i livelli di Landau, concorrono a definire la particella entrante e quella uscente. Naturalmente il tutto è moltiplicato per la delta di conservazione della componente y del momento.

$$\langle n, k|e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}|m, p\rangle = \delta(p - k + q_y) f_{nm}(\boldsymbol{q}) \exp\left(il^2 q_x \frac{k + p}{2}\right) \tag{3.98}$$

dove:

$$f_{n,m}(\boldsymbol{q}) = \begin{cases} e^{-(lq/2)^2} \sqrt{\frac{m!}{n!} 2^{m-n}} (-l(iq_x + q_y))^{n-m} L_m^{n-m}((lq)^2/2) & , m \leq n \\ e^{-(lq/2)^2} \sqrt{\frac{n!}{m!} 2^{n-m}} (-l(iq_x + q_y))^{m-n} L_n^{m-n}((lq)^2/2) & , n \leq m \end{cases} \tag{3.99}$$

L_n^m sono i polinomi associati di Laguerre mentre l è la lunghezza d'onda magnetica.

Se si inseriscono le equazioni (3.98), (3.94) e (3.93) in (3.89), si scopre che la somma sui momenti interni satura le delta di conservazione e manda a 1 i fattori di fase permettendo l'identificazione:

$$\Gamma^0(\boldsymbol{q}, n, m) = f_{nm}(\boldsymbol{q}) \tag{3.100}$$

Tuttavia la presenza delle impurezze non può essere trascurata. Esse si manifestano nella self-energia (la cui parte immaginaria rappresenta l'inverso del tempo di rilassamento) che veste le funzioni di Green e nelle correzioni di vertice.

3.2.2 Scattering su impurezze: self-energia e correzioni di vertice

La trattazione microscopica delle impurezze parte dalla definizione di un potenziale di interazione. Per i nostri scopi è irrilevante la dinamica delle impurezze: esse vengono schematizzate da centri fissi di scattering. In prima quantizzazione il potenziale che le rappresenta è la somma di potenziali centrali:

$$V(\hat{\boldsymbol{r}}) = \sum_j V(\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{R}_j) \tag{3.101}$$

In seconda quantizzazione la rappresentazione di operatori di singola particella prescrive:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{NMj} C_N^\dagger \langle N|V(\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{R}_j)|M\rangle C_M \\ &= \frac{1}{S} \sum_{NMj\boldsymbol{q}} C_N^\dagger \langle N|e^{i\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{q}}|M\rangle V(\boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}_j} C_M \end{aligned} \tag{3.102}$$

La conoscenza esatta dei centri di scattering non è però concessa. Tutte le disposizioni possibili vanno prese in considerazione con la probabilità relativa: in assenza di informazioni si considerano equiprobabili tutte le disposizioni. Si è già discussa la plausibilità di questa affermazione in condizioni di impurezze molto

diluite nella sezione dedicata alla deduzione quantistica della resistività in assenza di campo magnetico. Riprendendo la notazione e le considerazioni fatte allora:

$$\begin{aligned}\langle V^{II}\rangle_{AV} &= \frac{1}{S}\sum_{NMj\boldsymbol{q}} C_N^\dagger \langle N|e^{i\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{q}}|M\rangle C_M V(\boldsymbol{q})\langle e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}_j}\rangle_{AV} \\ &= \sum_{NM\boldsymbol{q}} \rho_{imp} C_N^\dagger \langle N|e^{i\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{q}}|M\rangle C_M V(\boldsymbol{q})\delta_{\boldsymbol{q},0} \\ &= \sum_{\boldsymbol{q}} \rho_{imp}\hat{\rho}(\boldsymbol{q})V(\boldsymbol{q})\delta_{\boldsymbol{q},0}\end{aligned} \tag{3.103}$$

L'ultima forma in cui è stato espresso il potenziale di interazione con le impurezze ne rivela la caratteristiche essenziali: si tratta di un potenziale di interazione densità-densità in cui l'invarianza traslazionale assicura la conservazione del momento. Il momento complessivo trasferito all'impurezza è nullo.

Naturalmente si può essere interessati all'interazione con più di una impurezza oppure a più interazioni con la medesima impurezza. Il primo passo consiste nel calcolo della self-energia ad ordini superiori al primo. Gli stessi diagrammi da noi utilizzati nella sezione (3.1.2) consentono di calcolare la self-energia in approssimazione di Born. Nel limite $\omega_c\tau \gg 1$ e di scattering a breve range Ando e Uemura [12] hanno dimostrato che la self-energia è data da:

$$\hbar\Sigma^{r,a}(n,\epsilon) = \frac{\hbar\epsilon - \epsilon_n}{2} - \frac{\Gamma_0}{2}\sqrt{\left(\frac{\hbar\epsilon - \epsilon_n}{\Gamma_0}\right)^2 - 1} \tag{3.104}$$

dove $\Gamma_0^2 = (2/\pi)\hbar\Omega_c(\hbar/\tau)$ e τ è il tempo di scattering a campo magnetico nullo. La parte immaginaria dell'equazione 3.104 è presa negativa (positiva) per la self-energia retarded (advanced). L'ampiezza del livello di Landau (dall'espressione della self-energia si legge essere $2\Gamma_0$) è indipendente dall'indice del livello di Landau se il range del potenziale di scattering è minore della lunghezza d'onda magnetica.

La scelta dei diagrammi che costituiscono la self-energia implica, attraverso una identità di Ward, una scelta specifica per le correzioni di vertice: l'approssimazione di Born nella self-energia impone di calcolare i vertici in approssimazione a scala (ladder). Il medesimo procedimento è stato utilizzato anche in assenza di campo magnetico. Ora, tuttavia, la particolare configurazione del vertice di corrente implica che le correzioni di vertice siano rilevanti solamente nel vertice di

carica. I livelli di Landau si intendono sufficientemente risolti e l'interazione con un impurezza non è in grado di mescolarli: questo significa che solamente stati appartenenti alla medesima banda (di Landau) intervengono nel processo di scattering. Abbiamo dimostrato che il vertice di corrente connette bande di Landau adiacenti ma distinte: le correzioni per scattering su impurezze sono irrilevanti. D'altra parte le correzioni al vertice di carica sono importanti. L'equazione integrale che definisce il vertice di carica si rappresenta in diagrammi:

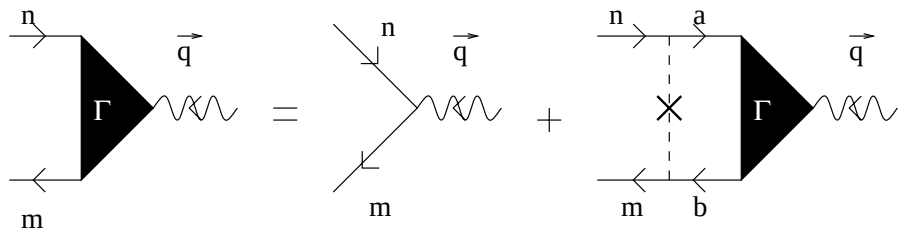


Figura 3.13:

Nota l'espressione esatta del potenziale di interazione, le regole di Feynman permettono di riscrivere in formule l'equazione:

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{q}, n, m, i\epsilon_1, i\epsilon_2) =& f_{n,m}(\boldsymbol{q}) + \rho_{imp} \sum_{a,b} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} |V(k)|^2 f_{b,m}(\boldsymbol{k}) f_{n,a}(-\boldsymbol{k}) \\ &\times G(a, i\epsilon_1) G(b, i\epsilon_2) e^{il^2(k_x q_y - k_y q_x)} \Gamma(\boldsymbol{q}, a, b, i\epsilon_1, i\epsilon_2)\end{aligned} \tag{3.105}$$

Il fattore di fase che compare nell'integrale non ammette una interpretazione immediata: esso nasce in parte dal fattore di fase legato alla trasformata di Fourier della densità elettronica, in parte dalla definizione del vertice Γ. Ricordando la cancellazione dei fattori di fase che si ottiene nella funzione triangolare, esso viene definito privandolo del fattore di fase che deriva dall'elemento di matrice della densità e che dipende esplicitamente dalle componenti y dei momenti delle particelle entranti nel vertice. L'equazione che definisce il vertice di carica ha, nella forma originaria, l'aspetto:

$$
\begin{aligned}
&\delta(p_1+q_y-p_2)e^{iq_x\frac{p_1+p_2}{2}}\Gamma(\boldsymbol{q},n_1,n_2,i\epsilon_1,i\epsilon_2)=\\
&\delta(p_1+q_y-p_2)e^{iq_x\frac{p_1+p_2}{2}}f_{n_1,n_2}(\boldsymbol{q})+\\
&\rho_{imp}\sum_{n_1',p_1';n_2',p_2'}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}|V(\boldsymbol{k})|^2\\
&\times\delta(p_1+k_y-p_1')e^{-ik_x\frac{p_1+p_1'}{2}}f_{n_1,n_1'}(-\boldsymbol{k})\\
&\times\delta(p_2'-k_y-p_2)e^{ik_x\frac{p_2'+p_2}{2}}f_{n_2',n_2}(\boldsymbol{k})\\
&\times G(n_1',i\epsilon_1)G(n_2',i\epsilon_2)\delta(p_1'+q_y-p_2')e^{iq_x\frac{p_1'+p_2'}{2}}\Gamma(\boldsymbol{q},n_1',n_2',i\epsilon_1,i\epsilon_2)
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

Moltiplicando a destra e a sinistra per $\exp[-iq_x(p_1+p_2)/2]$ e sommando sulle variabili p_1' e p_2' si ottiene, saturando due delta di conservazione ed eliminando quella comune, l'equazione (3.105).

3.2.3 Dalle funzioni triangolari alle suscettività

In termini delle funzioni di vertice e delle funzioni di Green-Matsubara vestite, la funzione triangolare si scrive:

$$
\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},i\Omega_r+i\omega_s,i\omega_s)=\frac{-\omega_c}{2\pi l\hbar\beta}\sum_{n,m,t}\sqrt{n}(\boldsymbol{w}_1\mathcal{F}_1+\boldsymbol{w}_2\mathcal{F}_2)
\tag{3.107}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1=&\,\Gamma(\boldsymbol{q},n-1,m,ik_t,ik_t+i\omega_s)\Gamma(-\boldsymbol{q},m,n,ik_t+i\omega_s,ik_t-i\Omega_r)\\
&\times G(n,ik_t-i\Omega_r)G(m,ik_t+i\omega_s)G(n-1,ik_t)\\
&+\Gamma(\boldsymbol{q},m,n,ik_t-i\omega_s,ik_t)\Gamma(-\boldsymbol{q},n-1,m,ik_t+i\Omega_r,ik_t-i\omega_s)\\
&\times G(n,ik_t)G(m,ik_t-i\omega_s)G(n-1,ik_t+i\Omega_r)
\end{aligned}
\tag{3.108}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2=&\,\Gamma(\boldsymbol{q},n,m,ik_t,ik_t+i\omega_s)\Gamma(-\boldsymbol{q},m,n-1,ik_t+i\omega_s,ik_t-i\Omega_r)\\
&\times G(n,ik_t)G(m,ik_t+i\omega_s)G(n-1,ik_t-i\Omega_r)\\
&+\Gamma(\boldsymbol{q},m,n-1,ik_t-i\omega_s,ik_t)\Gamma(-\boldsymbol{q},n,m,ik_t+i\Omega_r,ik_t-i\omega_s)\\
&\times G(n,ik_t+i\Omega_r)G(m,ik_t-i\omega_s)G(n-1,ik_t)
\end{aligned}
\tag{3.109}
$$

Il coefficiente davanti alla somma ha il segno negativo originario della loop fermionica, il fattore $\omega_c l$ legato all'operatore corrente presente nella funzione triangolare e infine la normalizzazione legata alla somma sulle frequenze di Matsubara (β). A denominatore si nota anche un ulteriore fattore ($2\pi l^2$) che deriva dalla somma sugli stati degeneri di Landau. A parte il fattore moltiplicativo, i quattro addendi che costituiscono la funzione triangolare si possono ricostruire semplicemente disegnando i grafici di Feynman. Si disegnano quattro triangoli e se ne orientano i lati. Due triangoli sono orientati in senso orario e due in senso antiorario. Due vertici di ciascun triangolo vengono rivestiti dalla correzione di carica (la funzione Γ) e lì si collega una linea di interazione Coulombiana di momento e frequenza di Matsubara rispettivamente $(\boldsymbol{q}, i\omega_s)$. Una delle due interazioni è entrante, l'altra uscente. Il vertice libero è il vertice di corrente: ad esso si associa la linea di corrente entrante con frequenza $i\Omega_r$[5]. Si dispongono quindi i livelli di Landau e le frequenze di Matsubara associati alle funzioni di Green. Trattandosi di una loop vi sarà una frequenza sommata (fermionica) da associare arbitrariamente ad un lato del triangolo: la conservazione delle frequenze ai vertici permetterà di assegnare le rimanenti frequenze[6]. Per l'assegnazione dei livelli di Landau bisogna ricordare che attraversando un vertice di corrente si salta al livello di Landau adiacente: al precedente per i grafici relativi a $\mathcal{F}_1$, al successivo per quelli riguardanti $\mathcal{F}_2$. Il livello di Landau associato alla funzione di Green che collega i due vertici di carica è indipendente dagli altri due: questo perchè non si conosce il modo con cui agisce il vertice di carica[7]. Infine si decide un criterio per inserire le frequenze, i livelli di Landau e il momento entranti e uscenti dai vertici di carica: noi abbiamo considerato positivo il momento entrante, abbiamo indicato prima il livello di Landau entrante e poi quello uscente e analogamente per le frequenze (vedi figura 3.14).

La somma sulla frequenza di Matsubara fermionica ik_t si può eseguire come l'integrazione su un cammino chiuso nel piano complesso. Ciascun addendo necessita di una attenzione particolare perchè il dominio di definizione presenta tagli

[5]Il momento $\boldsymbol{Q}$ della corrente esterna è già posto uguale a 0 perchè si lavora in corrente uniforme.

[6]La frequenza fermionica è stata indicata con il simbolo ik_1 per distinguerla dalle rimanenti frequenze bosoniche. In questo modo è evidente che le funzioni di Green sono caratterizzate sempre, correttamente, da frequenze di Matsubara fermioniche

[7]Nel limite di campi magnetici molto grandi i livelli di Landau sono completamente risolti e il vertice di carica si può considerare diagonale sugli indici di Landau

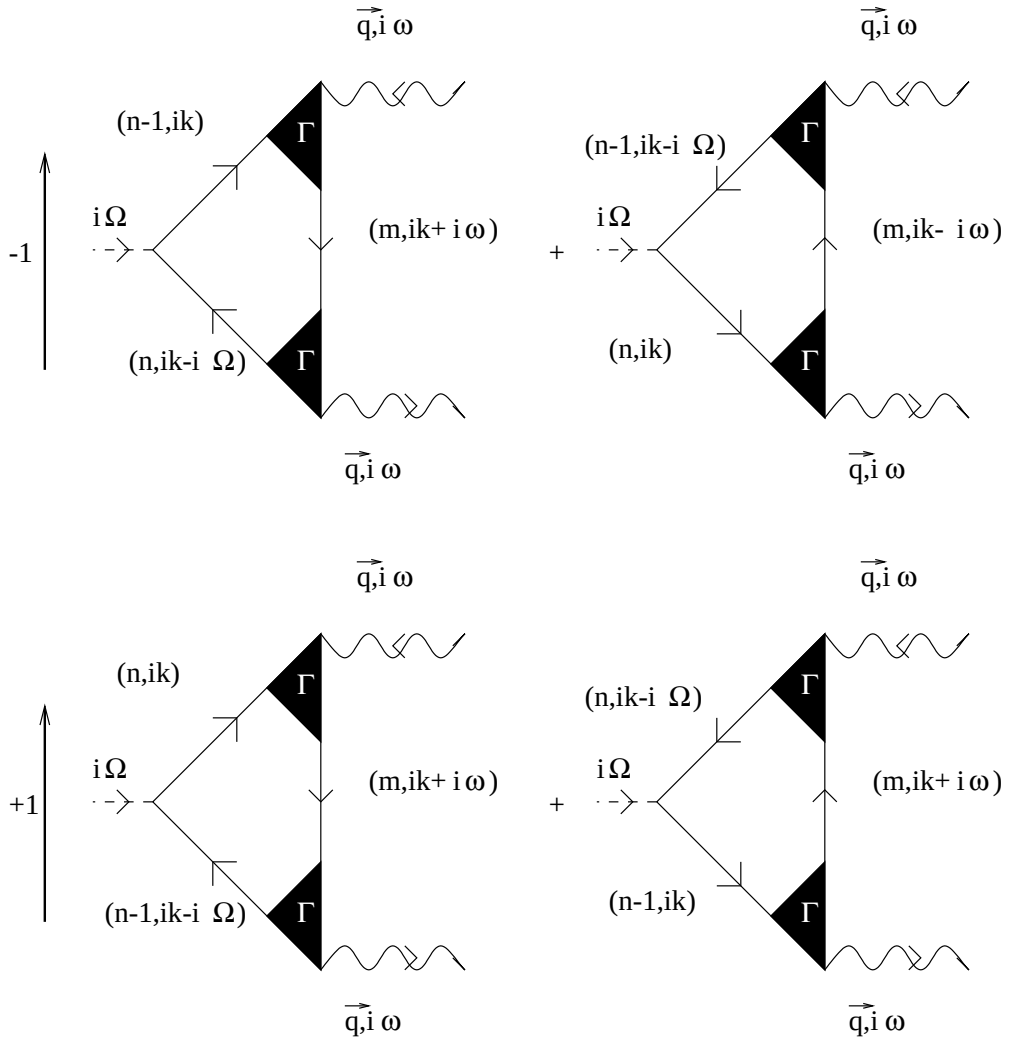


Figura 3.14: *I quattro grafici triangolari che costituiscono la funzione* Δ. *Si riconoscono i livelli di landau e le prescrizioni dovute al vertice di corrente*

diversi nel piano relativi alle diverse funzioni di Green.

La funzione $\mathbf{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\omega+i\eta,\omega-i\eta)$ si ottiene con i prolungamenti analitici: $i\Omega_r+i\omega_s\to\Omega+\omega+i\eta$, $i\Omega_r\to\Omega+i\eta$, e $i\omega_s\to\omega-i\eta$. Infine si prende il limite stazionario $\Omega\to 0$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\omega+i\eta,\omega-i\eta)=\frac{\omega_c}{2\pi l}\sum_{n,m}\sqrt{n}\int\frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi i}n_F(\epsilon)\\ \times[\boldsymbol{w}_1\big(P^*(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)+P^*(-\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon-\omega)\\ -\boldsymbol{w}_2P(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)+P(-\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon-\omega)\big)]\end{aligned}\tag{3.110}$$

dove:

$$\begin{aligned}&P(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)=\\ &\Gamma_{+-}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)\Gamma_{--}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega)G^a(n-1,\epsilon)\\ &-\Gamma_{--}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)\Gamma_{--}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon+\omega,\epsilon)G^a(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega)G^a(n-1,\epsilon)\\ &+\Gamma_{++}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon-\omega,\epsilon)\Gamma_{+-}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon,\epsilon-\omega)G^r(n,\epsilon-\omega)G^r(m,\epsilon)G^a(n-1,\epsilon-\omega)\\ &-\Gamma_{+-}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon-\omega,\epsilon)\Gamma_{--}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon,\epsilon-\omega)G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega)G^a(n-1,\epsilon)\\ &+\Gamma_{++}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)\Gamma_{++}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n,\epsilon)G^r(m,\epsilon+\omega)G^r(n-1,\epsilon)\\ &-\Gamma_{++}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)\Gamma_{+-}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n,\epsilon)G^r(m,\epsilon+\omega)G^a(n-1,\epsilon)\end{aligned}\tag{3.111}$$

I segni a pedice delle funzioni Γ si riferiscono al segno della parte immaginaria infinitesima che deve essere sommata alle frequenze che compaiono fra gli argomenti delle funzioni di vertice.

La forma dell'equazione (3.110) rivela immediatamente che nel limite stazionario le funzioni triangolari sono vettori a componenti puramente reali. La dimostrazione dell'equazione (3.110) è molto laboriosa per l'elevato numero di addendi che nasce dall'integrale attorno ai tagli delle funzioni di Green. Essa si basa in sostanza sul calcolo diretto delle somme di Matsubara condotte sui vari addendi che compongono la funzione triangolare e sulle proprietà di simmetria possedute dai vertici e dalle funzioni di Green sotto coniugazione complessa. La proprietà fondamentale a cui si fa riferimento è:

$$\left(\Gamma_{\pm,\pm}(\boldsymbol{q}, n, m, \epsilon, \epsilon+\omega)\right)^* = \Gamma_{\mp,\mp}(-\boldsymbol{q}, m, n, \epsilon+\omega, \epsilon) \tag{3.112}$$

dove i pedici alle funzioni Γ indicano i segni delle parti immaginarie infinitesime delle frequenze, con $*$ si è indicata invece la coniugazione complessa. La formula sopra non mette in luce che la coniugazione complessa comporta uno scambio dei pedici delle Γ oltre alla trasformazione $+ \to -$ e viceversa. Per questo motivo la coniugazione complessa agisce su Γ_{+-} mandandolo in una funzione Γ con gli stessi pedici, sia pur con argomenti diversi. La dimostrazione della equazione (3.112) parte dall'analisi dell'equazione che definisce il vertice di carica:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\pm,\pm}(\boldsymbol{q}, n, m, \epsilon \pm i\eta, \epsilon+\omega \pm i\eta) = \\
&\qquad f_{n,m}(\boldsymbol{q}) + \rho_{imp} \sum_{a,b} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} |V(k)|^2 f_{b,m}(\boldsymbol{k}) f_{n,a}(-\boldsymbol{k}) \\
&\qquad \times G(a, \epsilon \pm i\eta) G(b, \epsilon+\omega \pm i\eta) e^{il^2(k_x q_y - k_y q_x)} \Gamma_{\pm,\pm}(\boldsymbol{q}, a, b, \epsilon \pm i\eta, \epsilon+\omega \pm i\eta)
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Prendiamone il complesso coniugato. Il vertice nudo gode della proprietà:

$$f^*_{n,m}(\boldsymbol{q}) = f_{m,n}(-\boldsymbol{q}) \tag{3.114}$$

come si deduce immediatamente dalla definizione del vertice attraverso i polinomi associati di Laguerre. Nelle funzioni di Green la coniugazione complessa cambia il segno alla parte immaginaria della fraquenza. In altri termini trasforma una funzione ritardata nell'anticipata e viceversa. Il complesso coniugato del vertice soddisfa quindi l'equazione integrale:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^*_{\pm,\pm}(\boldsymbol{q}, n, m, \epsilon \pm i\eta, \epsilon+\omega \pm i\eta) = \\
&\qquad f_{m,n}(-\boldsymbol{q}) + \rho_{imp} \sum_{a,b} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} |V(k)|^2 f_{m,b}(-\boldsymbol{k}) f_{a,n}(\boldsymbol{k}) \\
&\qquad \times G(a, \epsilon \mp i\eta) G(b, \epsilon+\omega \mp i\eta) e^{-il^2(k_x q_y - k_y q_x)} \Gamma^*_{\pm,\pm}(\boldsymbol{q}, a, b, \epsilon \pm i\eta, \epsilon+\omega \pm i\eta)
\end{aligned} \tag{3.115}$$

da cui si deduce che la soluzione deve avere il segno del momento $\boldsymbol{q}$ cambiato, e le frequenze e i livelli di Landau scambiati. I segni a pedice seguono naturalmente quelli delle parti immaginarie negli argomenti delle funzioni di Green. Quindi vale la (3.112 Ora vogliamo dimostrare che nel limite di potenziali di diffusione a breve range e in condizione di forti campi magnetici ($\omega_c\tau \gg 1$) possiamo esprimere la funzione triangolare in termini del vettore $\boldsymbol{q}$ e della parte immaginaria della suscettività generalizzata. La suscettività generalizzata, detta anche funzione di polarizzazione propria, è il prolungamento analitico del correlatore densità-densità. Con le correzioni dovute alla presenza di impurezze il correlatore densità-densità è cosituito da due funzioni di Green (vestite), da un vertice di carica nudo (f) e da un vertice di carica con correzioni in ladder approximation (Γ). La funzione triangolare invece, come si vede dalla formula 3.110 è composta da tre funzioni di Green e due vertici di carica corretti. Simbolicamente possiamo affermare che il nostro compito è quello di dimostrare:

$$\boldsymbol{w}GGG\Gamma\Gamma \to \boldsymbol{q}GG\Gamma f \tag{3.116}$$

nelle condizioni in cui operiamo.

Ricondurre il prodotto di tre funzioni di Green al prodotto di due è abbastanza agevole. Le funzioni di Green ritardate e anticipate si scrivono:

$$\Gamma^{r,a}(n,\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \hbar^{-1}\epsilon_n - \Sigma^{r,a}(n,\epsilon)} \tag{3.117}$$

L'identità algebrica $1/AB = (1/A - 1/B)/(B - A)$ permette di scomporre il prodotto di due funzioni di Green:

$$G^r(n,\epsilon)G^a(n-1,\epsilon) = \frac{G^r(n,\epsilon) - G^a(n-1,\epsilon)}{\omega_c + \Sigma^r(n,\epsilon) - \Sigma^r(n-1,\epsilon)} \tag{3.118}$$

Nelle condizioni in cui noi operiamo la frequenza di ciclotrone è molto maggiore dell'inverso del tempo di rilassamento. Ma, per definizione, la parte immaginaria della self-energia è l'inverso del tempo di rilassamento. A denominatore trascuriamo dunque la parte immaginaria della self-energia ed otteniamo $\omega_c/2$. Riassumendo:

$$G^r(n,\epsilon)G^a(n-1,\epsilon) \approx \frac{2}{\omega_c}[G^r(n,\epsilon) - G^a(n-1,\epsilon)] \tag{3.119}$$

Ridurre il prodotto di due funzioni di vertice ad un vertice nudo e una correzione di vertice è un po' più laborioso. In primo luogo dobbiamo valutare il vertice di carica e fornirne uno sviluppo. Nella approssimazione di potenziale di impurezza a breve range (ossia $ql \ll 1$) il vertice nudo è diagonale negli indici di Landau. Quindi posso svolgere le somme su a e b nell'equazione (**??**) ponendo $f_{b,m}(\boldsymbol{q}) = f_{b,m}(\boldsymbol{q})\delta_{b,m}$ e $f_{n,a}(-\boldsymbol{q}) = f_{n,a}(-\boldsymbol{q})\delta_{n,a}$. Per centri di scattering a breve range posso anche considerare $V(k)$ costante e portarlo fuori dall'integrale. Allora l'equazione che definisce il vertice di carica assume la forma:

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{q},n,m,i\epsilon+i\omega,i\epsilon) &= f_{n,m}(\boldsymbol{q}) \\ &+ (\Gamma_0/2\hbar)^2\mathcal{I}(q,n,m)G(n,i\epsilon+\imath\omega)G(m,i\epsilon)\Gamma(\boldsymbol{q},n,m,i\epsilon+i\omega,i\epsilon)\end{aligned} \tag{3.120}$$

dove nella funzione $\mathcal{I}(q,n,m)$ si è compendiato l'integrale sul momento trasferito attraverso l'impurezza, del prodotto delle due funzioni vertice nudo e del fattore di fase. Tale integrale è esprimibile in termini dei polinomi associati di Laguerre:

$$\mathcal{I}(q,n,m) = (-1)^{n+m}e^{-(lq)^2/2}L_m^{n-m}((lq)^2/2)L_n^{m-n}((lq)^2/2) \tag{3.121}$$

L'equazione 3.120 permette di definire la correzione al vertice di carica:

$$\Gamma_{\pm,\pm}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon_1,\epsilon_2) = f_{n,m}(\boldsymbol{q}) + \delta_{\pm,\pm}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon_1,\epsilon_2) \tag{3.122}$$

La correzione δ è piccola rispetto al vertice nudo, tranne che nel caso $m = n$, ossia:

$$(\Gamma_0/2\hbar)^2G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega)\mathcal{I}(q,m,n) \ll 1 \qquad n \neq m \tag{3.123}$$

Per energie prossime al centro della banda n-esima e per frequenze ω molto inferiori alla frequenza di ciclotrone[8], possiamo affermare che:

[8]Ricordando che $\hbar\omega$ è dell'ordine dell'energia termica e che i campi magnetici sono alti la condizione è sicuramente soddisfatta

$$G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega) \approx \frac{2\hbar}{\Gamma_0}\frac{1}{(n-m)\omega_c} \tag{3.124}$$

dove abbiamo usato il fatto che, come si vede dalla (3.104, il massimo di $|G(n,\epsilon)|$ è dell'ordine di $2\hbar/\Gamma_0$. Lo studio della funzione $\mathcal{I}(q,m,n)$ [25] dimostra che essa, per valori tipici di q è fortemente piccata in $n=m$.

Ora consideriamo un contributo alla funzione triangolare.

$$\Gamma_{+,-}(\boldsymbol{q},m,n,\epsilon,\epsilon+\omega)\Gamma_{-,-}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega) \tag{3.125}$$

I livelli di Landau delle correzioni di vertice non concordano con quelli delle funzioni di Green: è una conseguenza della riduzione del numero delle funzioni di Green. L'accordo verrà ristabilito risommando i diversi termini (vedi avanti). Sapendo che le correzioni al vertice nudo sono rilevanti solamente per indici di Landau entranti e uscenti uguali, possiamo tenere i termini della (3.125) con al più una correzione. Ci sono due termini con una sola correzione:

$$f_{n,m}(\boldsymbol{q})\delta_{--}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega) \tag{3.126}$$

e

$$f_{m,n-1}(-\boldsymbol{q})\delta_{+-}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega) \tag{3.127}$$

Considerato il fatto che entrambi compariranno sommati sulle variabili n ed m, il primo può essere trascurato rispetto al secondo. Scriviamo esplicitamente le somme:

$$\sum_{n,m}\sqrt{n+1}f_{n+1,m}(\boldsymbol{q})\delta_{--}(-\boldsymbol{q},m,n,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n+1,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega) \tag{3.128}$$

e

$$\sum_{n,m}\sqrt{n}f_{m,n-1}(-\boldsymbol{q})\delta_{+-}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega) \tag{3.129}$$

dove abbiamo traslato gli indici muti (m, n) per rendere le funzioni δ direttamente confrontabili. Poichè il prodotto di funzioni di Green è piccolo quando i livelli di Landau non sono uguali, la prima somma è trascurabile rispetto alla seconda. Unendo le equazioni (3.118) e (3.129) abbiamo dimostrato che, in approssimazione di potenziali di scattering a breve range e nel limite di $\omega_c\tau \gg 1$, vale la relazione:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{+-}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)\Gamma_{--}(-\boldsymbol{q},m,n-1,\epsilon+\omega,\epsilon)G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega)G^a(n-1,\epsilon)\\
&\quad\approx\frac{1}{\omega_c}\Gamma_{+-}(\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon+\omega)f_{m,n-1}(-\boldsymbol{q})G^r(n,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega)\\
&\qquad-\frac{1}{\omega_c}f_{n,m}(\boldsymbol{q})\Gamma_{--}(-\boldsymbol{q},m,n,\epsilon+\omega,\epsilon)G^a(m,\epsilon+\omega)G^r(n,\epsilon)
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Gli altri termini si comportano in modo analogo. Si sceglie di mantenere il vertice di carica completo con gli indici di Landau corrispondenti a quelli delle due funzioni di Green rimaste. In modo del tutto naturale anche le parti immaginarie delle frequenze sono ben collegate. Il vertice nudo presenta invece una apparente discordanza nei livelli di Landau con le funzioni di Green entranti e uscenti. La corrispondenza viene recuperata utilizzando l'identità:

$$\sqrt{n+1}f_{n+1,m}(\boldsymbol{q})-\sqrt{m}f_{n,m-1}(\boldsymbol{q})=\frac{-l(iq_x+q_y)}{\sqrt{2}}f_{n,m}(\boldsymbol{q}) \tag{3.131}$$

L'identità (3.131) che lega i vertici nudi si riconduce, utilizzando la definizione di vertice, ad una identità fra i polinomi associati di Laguerre. Ad esempio, nel caso $n \geq m$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n+1}\sqrt{\frac{m!}{(n+1)!}2^{m-n-1}}(-l(iq_x+q_y))^{n+1-m}L_m^{n+1-m}((lq)^2/2)\\
&-\sqrt{m}\sqrt{\frac{(m-1)!}{n!}2^{m-1-n}}(-l(iq_x+q_y))^{n-m+1}L_{m-1}^{n-m+1}((lq)^2/2)\\
&=\sqrt{\frac{m!}{n!}2^{m-n}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-l(iq_x+q_y))^{n-m}\\
&\times(-l(iq_x+q_y))[L_m^{n+1-m}((lq)^2/2)-L_{m-1}^{n-m+1}((lq)^2/2)]
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Ma per i polinomi associati di Laguerre vale la relazione:

$$L_m^{n+1}(x) - L_{m-1}^{n+1}(x) = L_m^n(x) \tag{3.133}$$

da cui segue immediatamente la (3.131). Gli altri casi si ricavano in modo analogo.

Lo sviluppo delle funzioni P porta una grande quantità di addendi che tuttavia possono essere organizzati sfruttando le proprietà di simmetria dei vertici. Si ottiene infine il risultato:

$$\boldsymbol{\Delta}(\pm\boldsymbol{q}, \pm\boldsymbol{q}, \pm(\omega + i\eta), \pm(\omega - i\eta)) = \mp\frac{2}{eB^2}\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{B}\Im\chi(q,\omega) \tag{3.134}$$

Dove la suscettività χ ha la forma:

$$\begin{aligned}
\chi(q,\omega) = \frac{1}{\pi l^2}\sum_{n,m}\int\frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi i}n_F(\epsilon) \\
\times[G^r(m,\epsilon+\omega)f_{n,m}(\boldsymbol{q}) \\
\times\{G^a(n,\epsilon)\Gamma_{+-}(-\boldsymbol{q},m,n,\epsilon+\omega,\epsilon) - G^r(n,\epsilon)\Gamma_{++}(-\boldsymbol{q},m,n,\epsilon+\omega,\epsilon)\} \\
+G^a(m,\epsilon-\omega)f_{m,n}(\boldsymbol{q}) \\
\times\{G^a(n,\epsilon)\Gamma_{--}(-\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon-\omega) - G^r(n,\epsilon)\Gamma_{+-}(-\boldsymbol{q},n,m,\epsilon,\epsilon-\omega)\}]
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Nota la forma delle funzioni Δ, utilizzando la (**??**) si ottiene la conducibilità di drag del sistema. Il passaggio alla resistività di drag si ottiene per inversione. Si deve tuttavia tener presente che la condicibilità è una matrice quadrata di rango 4[9].La matrice resistività si scrive:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_{12} &= [-\boldsymbol{\sigma}_{22}\boldsymbol{\sigma}_{12}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{11} + \boldsymbol{\sigma}_{21}]^{-1} \\
&\approx -\boldsymbol{\rho}_{11}\boldsymbol{\sigma}_{12}\boldsymbol{\rho}_{22}
\end{aligned} \tag{3.136}$$

dove la validità della approssimazione è legata al fatto che si è assunto che l'inverso delle resistività dei singoli layer sia molto maggiore della conducibilità di drag.

[9]Due indici si riferiscono alle direzioni spaziali-tutte coinvolte in presenza di campo magnetico-, gli altri due ai diversi layer identificando le conducibilità interne e quelle di drag.

Dalla relazione di Onsager si ricava che per sistemi isotropi le resistività intra-layer hanno la forma generica:

$$\boldsymbol{\rho}_{ii} = \rho_{0i} \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \tag{3.137}$$

dove $\rho_{0i} = m *_i /(n_i e^2 \tau_i)$ è la resistività in campo magnetico nullo. Per campi magnetici grandi $b_i \gg a_i$ e il tensore transresistività è diagonale:

$$\rho_{12}^{xx} = -\left[\frac{b_1 b_2}{(\omega_c\tau)_1(\omega_c\tau)_2}\right] \frac{e_1 e_2}{4 n_1 n_2 k_B T} \frac{1}{S} \sum_{\boldsymbol{q}} q^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} |U_{sc}(q)|^2 \frac{\Im\chi_1(\boldsymbol{q},\omega)\Im\chi_2(\boldsymbol{q},\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\omega/2k_B T)} \tag{3.138}$$

In quest'ultima formula si è inserito il potenziale di interazione schermato U_{sc} invece di quello coulombiano. L'impiego del potenziale schermato è giustificato a livello quantistico dal superamento del secondo ordine perturbativo e del limite di elettroni indipendenti (come si vedrà nella prossima sezione). Il contributo dello screening gioca inoltre un ruolo fondamentale nell'interpretazione dei fenomeni osservati.

3.3 Potenziale efficace di interazione: calcolo in Random Phase Approximation

Nel calcolo della resistività di drag il potenziale Coulombiano tra i due layer è stato inserito come un termine perturbativo. Si è poi dimostrato che lo sviluppo al primo ordine perturbativo si annulla in corrente continua. La formula di resistività ottenuta è lo sviluppo al secondo ordine nella interazione della conducibilità dedotta con la formula di Kubo. Gli ordini perturbativi superiori al secondo (il primo non nullo) e un primo approccio di gas di Fermi interagente possono essere raggiunti utilizzando il metodo della *random phase approximation*.

Questo metodo viene impiegato ad esempio per calcolare la self-energia di un sistema a molti corpi indipendenti perturbati da un potenziale di interazione a due corpi. La self-energia dovrebbe essere calcolata risommando una vasta schiera di grafi. Si decide di sommare in realtà una sola tipologia: per la forma che assumono i grafi sommati nella rappresentazione diagrammatica si parla anche di approssimazione "a bolla".

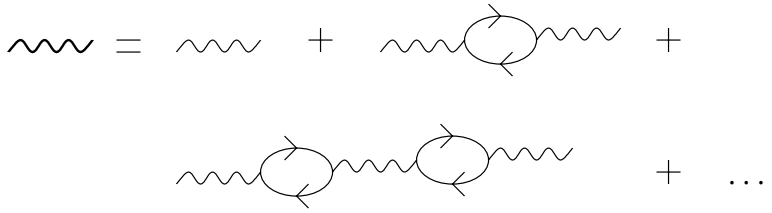


Figura 3.15: *L'interazione in RPA: l'autointerazione si sviluppa su successivi grafici a bolla. In neretto è segnata l'interazione efficace.*

Come si può evincere dal diagramma in figura (fig.3.15) l'interazione efficace definita dalla risommazione dei grafici a bolla soddisfa l'equazione:

$$V = V_0 + V_0 \chi V \tag{3.139}$$

dove V rappresenta il potenziale efficace, V_0 il potenziale puro e χ rappresenta la suscettività, ossia il prodotto delle due funzioni di Green che costituiscono la bolla integrato sul momento circolante. Supponendo l'invarianza traslazionale dell'hamiltoniana che descrive il sistema e che essa non dipenda dal tempo, si ottiene

un'equazione nello spazio dei momenti algebrica. Il potenziale a due corpi che entra nel nostro problema è quello di Coulomb. La hamiltoniana complessiva è comunque invariante per traslazione. Il calcolo è complicato però dal fatto che il sistema al quale vogliamo applicare la RPA per calcolare l'interazione efficace è diviso in due sottosistemi distinti. Il problema si risolve introducendo una notazione matriciale.

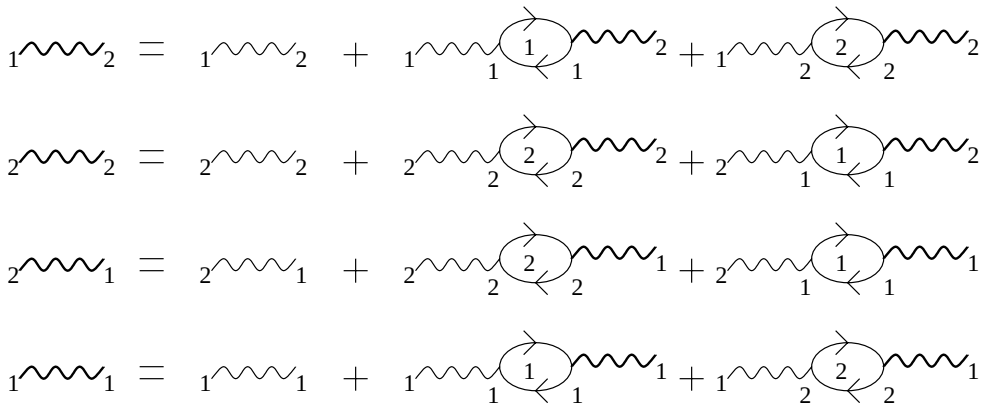


Figura 3.16: *Rappresentazione diagrammatica del sistema di equazioni Dyson che definisce l'interazione Coulombiana efficace del sistema a doppio strato. I numeri indicano i layer, le linee ondulate l'interazione coulombiana, quelle in grassetto l'interazione efficace.*

Nella nostra approssimazione entrerà anche l'interazione di ciascuno strato con sè stesso. Il sistema di equazioni di Dyson che definisce l'interazione efficace ha ancora la forma:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_0} + \boldsymbol{V_0}\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{V} \tag{3.140}$$

dove però i singoli termini sono matrici. Esso ammette una rappresentazione grafica (fig. 3.16).

La matrice di suscettività è diagonale perchè il tunneling fra i layer è assente o comunque molto soppresso. L'equazione matriciale (3.140) prende dunque la forma:

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}^0 & V_{12}^0 \\ V_{21}^0 & V_{22}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11}^0 & V_{12}^0 \\ V_{21}^0 & V_{22}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \tag{3.141}$$

La soluzione si calcola con una semplice inversione di matrici:

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{V^0}\boldsymbol{\chi})^{-1}\boldsymbol{V^0} \tag{3.142}$$

e fornisce, per il potenziale efficace di interazione inter-layer V_{12}:

$$V_{12}(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{1}{K(\boldsymbol{q},\omega)} V_{12}^0(\boldsymbol{q}) \tag{3.143}$$

dove K è la costante dielettrica efficace del sistema.

$$K(\boldsymbol{q},\omega) = [(1 - V_{11}^0(\boldsymbol{q})\chi_1(\boldsymbol{q},\omega))(1 - V_{22}^0(\boldsymbol{q})\chi_2(\boldsymbol{q},\omega)) - V_{12}^0(\boldsymbol{q})V_{21}^0(\boldsymbol{q})\chi_1(\boldsymbol{q},\omega)\chi_2(\boldsymbol{q},\omega)] \tag{3.144}$$

Il potenziale efficace così calcolato ha un aspetto molto simile a quello calcolato attraverso l'equazione autoconsistente di Poisson. Entro certi limiti si può dimostrare che i due coincidono.

In seconda quantizzazione il contributo all'energia dato dall'interazione di Coulomb si scrive:

$$V^0 = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}_1 i_1, \boldsymbol{k}_2 i_2, \boldsymbol{k}_1' i_1', \boldsymbol{k}_2' i_2'} a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1 i_1} a^\dagger_{\boldsymbol{k}_2 i_2} \langle \boldsymbol{k}_1 i_1, \boldsymbol{k}_2 i_2 | V^0 | \boldsymbol{k}_1' i_1', \boldsymbol{k}_2' i_2' \rangle a_{\boldsymbol{k}_2' i_2'} a_{\boldsymbol{k}_1' i_1'} \tag{3.145}$$

dove i gradi di libertà che si riferiscono ai due strati sono stati trattati come gradi di pseudospin e indicati con l'indice i. La natura matriciale di V^0 scaturisce così più naturalmente.

Per valutare l'elemento di matrice $\langle \boldsymbol{k}_1 i_1, \boldsymbol{k}_2 i_2 | V^0 | \boldsymbol{k}_1' i_1', \boldsymbol{k}_2' i_2' \rangle$ si inseriscono due completezze negli autostati impropri di posizione e si ottiene:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{k}_1 i_1, \boldsymbol{k}_2 i_2 | V^0 | \boldsymbol{k}'_1 i'_1, \boldsymbol{k}'_2 i'_2 \rangle = \frac{4\pi e_{i'_1} e_{i'_2}}{\varepsilon} \int & \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}'_1 \mathrm{d}\boldsymbol{x}'_2 \\ & \lambda^*_{i_1}(z_1)\lambda^*_{i_2}(z_2)\exp(i\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r_1})\exp(i\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r_2}) \\ & \frac{1}{|\boldsymbol{x'_1} - \boldsymbol{x'_2}|}\langle \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{x}'_1 \boldsymbol{x}'_2 \rangle \\ & \exp(-i\boldsymbol{k}'_2 \cdot \boldsymbol{r'_2})\exp(-i\boldsymbol{k}'_1 \cdot \boldsymbol{r'_1})\lambda_{i'_2}(z'_2)\lambda_{i'_1}(z'_1)\end{aligned} \tag{3.146}$$

dove $\lambda(z)$ sono le componenti in z della funzione d'onda che definise l'elettrone e per brevità nelle variabili di integrazione e nell'elemento di matrice del potenziale si è utilizzata la notazione vettoriale tridimensionale $\boldsymbol{x}$.

Ma l'ortogonalità degli autostati di posizione:

$$\langle \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{x}'_1 \boldsymbol{x}'_2 \rangle = \delta(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x'_1})\delta(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x'_2}) \tag{3.147}$$

Grazie all'identificazione delle coordinate dovuta alle δ appaiono nell'integranda fattori del tipo:

$$\lambda^*_i(z)\lambda_j(z) \tag{3.148}$$

La bassissima probabilità di tunneling fra uno strato e l'altro misurata sperimentalmente ci assicura che la sovrapposizione tra due funzioni d'onda con diverso pseudospin sia nulla. Matematicamente si ottengono delle δ di conservazione di pseudospin.

Data l'invarianza traslazionale del potenziale di Coulomb, l'integrale sulle variabili $\boldsymbol{r}$ produce la conservazione dei momenti e la trasformata di Fourier (nel piano) del potenziale, ossia:

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}\boldsymbol{s}\exp[i\boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k'_1} + \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k'_2})] \\ &\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\frac{1}{[|\boldsymbol{r}|^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}}\exp[i\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k'_1})]\end{aligned} \tag{3.149}$$

Sapendo che:

$$-\nabla^2 \frac{1}{x} = \delta(\boldsymbol{x}) \tag{3.150}$$

con una trasformazione di Fourier solo nel piano definito dalla variabile $\boldsymbol{r}$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \int \mathrm{d}\boldsymbol{r} \frac{1}{(|\boldsymbol{r}|^2 + z^2)^{1/2}} \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) = \delta(z) \tag{3.151}$$

Avendo indicato con $G_{\boldsymbol{k}}(z)$ la funzione integrale, si riconosce nell'equazione (3.151) l'equazione fondamentale utilizzata per risolvere il problema elettrostatico nella sezione (2.3.4). D'altro canto tale funzione è, a meno di un segno, anche la trasformata Fourier del potenziale che stiamo cercando. La sua forma esplicita è nota:

$$G_{\boldsymbol{k}}(z) = -\frac{1}{2k} e^{-k|z|} \tag{3.152}$$

Ma allora, utilizzando la stessa notazione introdotta nella sezione (2.3.4) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} V^0 = -\frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k_1 k_2 k'_2 k'_1} i_1 i_2} \delta(\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k'_1} + \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k'_2}) \frac{4\pi e_{i_1} e_{i_2}}{\varepsilon} \\ a^\dagger_{\boldsymbol{k_1} i_1} a^\dagger_{\boldsymbol{k_2} i_2} G_{i_1 i_2}(|\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k'_1}|) a_{\boldsymbol{k'_2} i_2} a_{\boldsymbol{k'_1} i_1} \end{aligned} \tag{3.153}$$

Eliminando una somma sui momenti con la delta di conservazione, si perviene alla forma più compatta:

$$V^0 = -\frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{q k_1 k_2} i_1 i_2} \frac{4\pi e_{i_1} e_{i_2}}{\varepsilon} a^\dagger_{\boldsymbol{k_1 + q} i_1} a^\dagger_{\boldsymbol{k_2 - q} i_2} G_{i_1 i_2}(q) a_{\boldsymbol{k_2} i_2} a_{\boldsymbol{k_1} i_1} \tag{3.154}$$

Dall'espressione finale risulta evidente che lo pseudospin si conserva: se una paticella di pseudospin i_1 viene distrutta nell'interazione, un'altra ne viene ricreata. Nel nostro particolare caso i può valere solo 1 o 2: ci troviamo in una rappresentazione di spin 1/2. In un sistema multistrato la rappresentazione con gli pseudospin diviene ancora più utile ed efficace. Per ottenere la matrice del potenziale $V^0_{ij}(q)$ basta valutare l'operatore definito in equazione (3.154) fra gli stati iniziale e finale dello scattering.

La matrice di suscettività è nota: basta applicare le consuete regole di Feynman per lo spazio dei momenti al diagramma a bolla e valutare la somma sulle frequenze di Matsubara fermioniche per ottenere:

$$\chi_{ii}(\boldsymbol{q},\omega) = -2\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\frac{f_0^{(i)}(\epsilon_{\boldsymbol{k}}) - f_0^{(i)}(\epsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})}{\epsilon_{\boldsymbol{k}} - \epsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} + \omega} \tag{3.155}$$

I termini fuori diagonale sono nulli perchè corrisponderebbero a contrazioni fra creatori e distruttori appartenenti a layer distinti: la conservazione dello pseudo-spin ne impone l'annullamento.

Nell'integrale che definisce la resistività generalizzata $\boldsymbol{q}$ e ω sono variabili mute, integrate su tutti i loro possibili valori. Tuttavia, l'integranda decresce esponenzialmente per valori di $\hbar\omega$ e $\hbar^2|\boldsymbol{q}|^2/2m*$ dell'ordine dell'energia termica. Per questa ragione calcoleremo il contributo della suscettività al potenziale effcace di interazione nel limite $\boldsymbol{q} \to 0$ e $\omega \to 0$. In tale limite si può sviluppare il numeratore dell'integrando della (3.155) e scrivere:

$$\begin{aligned}\chi_{ii} = &-2\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{k}}\epsilon_{\boldsymbol{k}}\beta f_0(\epsilon_{\boldsymbol{k}})[1-f_0(\epsilon_{\boldsymbol{k}})]}{\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{m^*}} = \\ &-2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi}m^*\frac{\partial n_F(\epsilon)}{\partial\epsilon} = -\frac{m^*}{\pi}\end{aligned} \tag{3.156}$$

In questo limite il potenziale calcolato in RPA coincide con il potenziale efficace calcolato risolvendo l'equazione di Poisson secondo il metodo dello screening di Thomas-Fermi. Infatti:

$$\begin{aligned}V_{ij}^0(p) &= -\frac{4\pi e_i e_j}{\varepsilon}G_{ij}(p) \\ \chi_i &= -\frac{m^*}{\pi}\end{aligned} \tag{3.157}$$

implica

$$V_{12}^0(q) = e_1\phi(q) \tag{3.158}$$

come si ottiene da semplice sostituzione.

Lo screening quantistico è uno screening dinamico: la costante dielettrica generalizzata dipende infatti dalla frequenza ω della perturbazione che la eccita. Nel nostro caso le fluttuazioni sono termiche e quindi,a basse temperature, solamente

eccitazioni di bassa frequenza sono probabili. Ecco perchè si effettua il limite a frequenza $\omega \to 0$. In tale limite si recupera naturalmente lo screening elettrostatico caratteristico del calcolo classico.

Il calcolo è stato fin qui condotto pensando alla situazione in assenza di campo magnetico. Tuttavia la deduzione del potenziale efficace di interazione in presenza di campo magnetico non è molto diversa. Gli operatori densità sono comunque sviluppati in serie di Fourier e quindi la trattazione riguardante strettamente il potenziale è identica. L'unica cosa che cambia sono le funzioni di polarizzazione che vanno ricalcolate secondo il metodo illustrato nella sezione (3.2.3).

Capitolo 4

Conclusioni

Lo studio teorico della risposta lineare nelle nanostrutture a doppio strato ci ha consentito di giungere ad una formulazione coerente delle proprietà di trasporto in tali sistemi. L'approccio semiclassico e quello quantistico hanno rivelato una chiara corrispondenza e soprattutto nel secondo è apparsa più chiara la base microscopica della teoria. Ora vogliamo dimostrare come la formula della resistività ottenuta interpreti in modo sintetico la fenomenologia raccolta nei dati sperimentali.

4.1 Dipendenza dalla temperatura

Analizziamo dapprima il risultato in campo magnetico nullo. A basse temperature si può approssimare la parte immaginaria della suscettività con il suo sviluppo a basse frequenze. Questo è dovuto al fatto che lo spazio delle fasi disponibile all'evento di scattering si riduce al diminuire della temperatura, in altre parole le fluttuazioni di carica necessarie affinchè vi sia interazione coulombiana fra i due layer sono molto ridotte. Matematicamente si osserva il fenomeno nel termine proporzionale al $\mathrm{Sh}^{-2}(\beta\hbar\omega/2)$ che è fortemente soppresso per energie $\hbar\omega$ che eccedono l'energia termica. Nel limite in cui il momento trasferito è molto inferiore al momento di Fermi del sistema[1], la parte immaginaria della suscettività si può scrivere:

[1] Anche questa condizione è favorita dalla suscettività

$$\Im\chi \approx m^2\omega/2\hbar^3 q k_F \tag{4.1}$$

Questo consente di svolgere completamente l'integrazione in ω. L'integrale in q è legato in particolar modo alla approssimazione con la quale si considera il potenziale efficace di interazione. Poichè i contributi essenziali provengono da quelle zone per le quali q è più piccolo o comparabile con d^{-1}, e dato che d^{-1} è molto più piccolo del momento di Fermi e del momento di Thomas-Fermi, nelle condizioni sperimentali a cui facciamo riferimento[3], approssimiamo il potenziale efficace di interazione nella forma:

$$e_1\phi(q) = \frac{\pi e_1 e_2}{k}\frac{q}{q_{TF}^2 \mathrm{Sh}(qd)} \tag{4.2}$$

dove k è la costante dielettrica e d è la istanza tra i layer.

Anche l'integrazione su q si può svolgere e si dimostra[13] che l'inverso del tempo di rilassamento di drag[2] si scrive:

$$\frac{1}{\tau_D} = \frac{\zeta(3)\pi}{16}\frac{k_B^2 T^2}{\hbar\epsilon_F}\frac{1}{(k_F d)^2}\frac{1}{(q_{TF} d)^2} \tag{4.3}$$

Si nota in particolare la dipendenza quadratica nella temperatura e la dipendenza da d^{-4}. L'andamento a bassa temperatura concorda con i dati sperimentali [3] anche se più piccolo di un fattore 2 suggerendo che il drag possa essere prodotto anche da altri meccanismi (come ad esempio l'interazione mediata da fononi[20]). A temperature maggiori il calcolo deve essere condotto numericamente. Data la forma a basse temperature è interessante fare un'analisi della funzione $1/\tau_D T^2$: essa non è costante, ma presenta un massimo e poi decresce per alte temperature. Anche questo andamento è in accordo con i risultati sperimentali. Il significato fisico di tale risultato si può ricercare analizzando da vicino la funzione $1/\tau_D T^2$:

$$1/\tau_D T^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}q |e_1\phi(q)|^2 F_T(q) \tag{4.4}$$

[2]Usando la formula di Drude si vede subito che questa quantità è direttamente proporzionale alla resistività di drag.

dove $F_T(q)$ è il risultato della integrazione in ω condotta nella formula della resistività di drag. $F_T(q)$ è fortemente dipendente dalla temperatura e presenta un massimo che avanza e si appiattisce all'aumentare di T[13]. Il potenziale invece è indipendente dalla temperatura e ha un massimo per poi decrescere esponenzialmente. L'andamento non monotono di $1/\tau_D T^2$ è da ricondursi ad una sovrapposizione dei massimi ossia vi è una regione di temperature per le quali il contributo del potenziale e quello dello spazio delle fasi (a sua volta separabile nella parte strettamente termica e nella suscettività dei layer) cooperano. A temperature inferiori l'andamento della resistività legato allo spazio delle fasi prevale, a temperature superiori predomina invece il forte screening e tutto lo "spazio" disponibile allo scattering non viene utilizzato.

4.2 Dipendenza dal campo magnetico

L'effetto di forti campi magnetici ($\omega_c\tau \gg 1$) sul sistema di elettroni bidimensionale è la quantizzazione dei livelli energetici. La richiesta di campi magnetici intensi è legata alla presenza dei centri di scattering che allargano i livelli di Landau rompendone la degenerazione. Di conseguenza solamente "bande" di Landau sufficientemente distanziate possono continuare ad assicurare l'assenza di mescolamento fra livelli di bande diverse dovuto ad esempio ad eccitazioni termiche oppure a scarrering su impurezze. In un campione di GaAs puro campi inferiori al Tesla sono già considerati grandi. Ciascuno dei due layer entra in regime di Hall. Questo è visibile anche dall'andamento della resistività di drag: al variare di B cambiano i fattori di riempimento delle bande di Landau. In altri termini si può affermare che il potenziale chimico di ciascuno dei due layer passa da una banda all'altra (scendendo progressivamente) al crescere del campo magnetico. L'effetto Hall quantistico permette di affermare che quando il potenziale si trova tra una banda e l'altra di stati di Landau (estesi) si ha la formazione di stati localizzati. La resistività di Hall, si mantiene costante in questo intervallo di campi, mentre la resistività diretta crolla praticamente a zero[3] a causa del gap che separa le due bande di Landau.

Questo andamento tipico viene riscontrato anche nella resistività di drag diretta (ρ_D^{xx})[4]. La formula della resistività da noi calcolata rende ragione di questo andamento infatti le suscettività che sono proporzionali alla densità degli stati tendono a 0 quando ci si allontana dal centro della banda come testimonia la self-energia (3.104).

Vi sono altri effetti predetti [19] dalla formula della resistività calcolata nella sezione (3.2) e poi osservati [23][22]: la resistività di drag è, al centro della banda (considero per ora lo stesso fattore di riempimento nei due layer) aumentata di $50 - 100$ volte rispetto a quella a campo magnetico nullo, e presenta la caratteristica struttura a doppio picco (twin-pick) all'interno di ciascuna banda. Il grande aumento della resistività di drag si spiega con il grande aumento della densità di stati che al centro della banda di Landau vale circa $\sqrt{2\omega_c\tau\pi^{-1}}g_0$ dove $g_0 = m\pi^{-1}\hbar^{-2}$ è la densità degli stati a campo magnetico nullo. Per trovare il

[3] Sono riportati in letteratura anche 13 ordini di grandezza in meno

[4] Non è mai stata osservata fino ad ora una resistività di drag trasversale (ρ_D^{xy})

fattore correttivo basta calcolare la parte immaginaria della self-energia 3.104 al centro di una banda. A basse temperature la resistività si calcola approssimativamente come il prodotto mediato termicamente delle densità di stati dei due layer calcolate in prossimità del potenziale chimico. Quindi ci si aspetta che

$$|\rho_{12}^{xx}(\omega_c\tau \gg 1)| \gg |\rho_{12}^{xx}(B=0)| \tag{4.5}$$

Analogamente a quanto riscontrato nella dipendenza dalla temperatura in campo nullo, l'effetto combinato dello spazio delle fasi disponibile all'evento di scattering e dello screening determina il caratteristico andamento a doppio picco della resistività di drag al variare del potenziale chimico all'interno di una determinata banda. La costante dielettrica efficace è proporzionale alla densità degli stati (è infatti proporzionale alla suscettività quando questa è grande poichè il termine quadratico nelle suscettività si elide almeno per piccoli momenti trasferiti). Il crescere della densità degli stati aumenta così lo schermo del potenziale coulombiano. Calcoli numerici dimostrano [19] che l'effetto delle suscettività è più che bilanciato dall'incremento nelle capacità di schermo dando luogo alla caratteristica struttura a doppio picco (vedi figura 4.2).

4.3 Drag negativo: un tentativo di spiegazione

Il Coulomb drag in regime di Hall presenta un aspetto caratteristico che venne evidenziato già da parte di H. Rubel et al.[23] e N. P. R. Hill et al.[22] nel 1996 ma studiato in particolar modo da T. J. Gramila et al. [6] nel 1998: il drag negativo ossia l'inversione della polarità nella tensione di drag sul layer trascinato rispetto alla condizione in campo magnetico nullo. Essi studiano un campione di nanostruttura a doppio strato costituita da GaAs/AlGaAs con due pozzi di $20nm$ separati da una barriera di $22,5nm$. La densità elettronica del loro campione è di circa $1,6 \times 10^{11} cm^{-2}$ e la mobilità di $2.5 \times 10^6 cm^2/Vs$. Il drag negativo emerge quando le densità elettroniche (e quindi i fattori di riempimento) sono diverse nei due layer. In particolare la banda di Landau più alta di un layer deve essere occupata per meno della metà mentre l'altra per più della metà. Nel campione le densità sono state squilibrate del 10%. In questo modo il medesimo campo magnetico applicato produce diversi fattori di riempimento.È stato tracciato quindi

un grafico della resistività di drag al variare del campo magnetico. Il grafico rivela, soprattutto a fattori di riempimento alti (≈ 8), un andamento quasi periodico in cui si alternano zone di drag positivo e negativo.

La nostra proposta di spiegazione del fenomeno parte dall'analisi della formula della resistività di drag (vedi 96:

$$\rho_{12}^{xx} = -\left[\frac{b_1 b_2}{(\omega_c\tau)_1(\omega_c\tau)_2}\right]\frac{e_1 e_2}{4n_1 n_2 k_B T}\frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{q}} q^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|U_{sc}(q)|^2 \frac{\Im\chi_1(\boldsymbol{q},\omega)\Im\chi_2(\boldsymbol{q},\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\omega/2k_B T)} \tag{4.6}$$

È evidente che per portatori di carica di segno opposto il drag è opposto a quello generato da portatori di segno concorde. La presenza di buche dà quindi sicuramente un contributo negativo[5] al drag. A campo magnetico e densità elettroniche fissati è univocamente determinato il fattore di riempimento dei livelli di Landau e il potenziale chimico nei due layer. Le densità di portatori di carica che entrano nella formula della resistività di drag sono le densità di portatori in prossimità del potenziale chimico: infatti solamente quelli danno un contributo significativo alla resisitività di drag. Si può quindi affermare che la resistività sia composta da quattro possibilità relative all'interazione elettrone-elettrone oppure elettrone-buca.

$$\begin{aligned}
\rho_{1e,2e}(\mu_1,\mu_2;B) &= -\frac{1}{n_{1e}(\mu_1)n_{2e}(\mu_2)}\frac{e^2}{4k_B T}\frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{q}} q^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|U_{sc}(q)|^2 \frac{\Im\chi_{1e}(\boldsymbol{q},\omega)\Im\chi_{2e}(\boldsymbol{q},\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\omega/2k_B T)} \\
\rho_{1e,2b}(\mu_1,\mu_2;B) &= +\frac{1}{n_{1e}(\mu_1)n_{2b}(\mu_2)}\frac{e^2}{4k_B T}\frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{q}} q^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|U_{sc}(q)|^2 \frac{\Im\chi_{1e}(\boldsymbol{q},\omega)\Im\chi_{2b}(\boldsymbol{q},\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\omega/2k_B T)} \\
\rho_{1b,2b}(\mu_1,\mu_2;B) &= -\frac{1}{n_{1e}(\mu_1)n_{2e}(\mu_2)}\frac{e^2}{4k_B T}\frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{q}} q^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|U_{sc}(q)|^2 \frac{\Im\chi_{1b}(\boldsymbol{q},\omega)\Im\chi_{2b}(\boldsymbol{q},\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\omega/2k_B T)} \\
\rho_{1b,2e}(\mu_1,\mu_2;B) &= +\frac{1}{n_{1e}(\mu_1)n_{2e}(\mu_2)}\frac{e^2}{4k_B T}\frac{1}{S}\sum_{\boldsymbol{q}} q^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|U_{sc}(q)|^2 \frac{\Im\chi_{1b}(\boldsymbol{q},\omega)\Im\chi_{2e}(\boldsymbol{q},\omega)}{\mathrm{Sh}^2(\omega/2k_B T)}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dove μ_i è il potenziale chimico del layer i-esimo, n_i è la densità elettronica globale del layer i-esimo All'espressione n_{1e} oppure n_{2b} si dà il significato di densità di

[5] Si intenderà da qui in poi con contributo negativo quello in direzione opposta a quella senza campo magnetico

elettroni o di buche per unità di superficie e di energia calcolata in prossimità del potenziale chimico integrata sull'intervallo di energie efficaci nel drag:

$$n_{1e} = \int_{\mu_1 - k_B T}^{\mu_1 + k_B T} \mathrm{d}\epsilon \; n_{1e}(\epsilon) \tag{4.8}$$

Rimane da stabilire quale meccanismo porti alla formazione di buche. L'insorgere di buche è legato alla presenza di stati localizzati, quegli stessi stati che permettono di spiegare l'effetto Hall intero. Questi stati localizzati hanno energie vicino alle bande di Landau e "assorbono" elettroni quando il potenziale chimico è vicino ad esse. L'ipotesi vorrebbe che quando una banda è riempita per più di metà questi stati localizzati si comportino da accettori per elettroni della banda sottostante producendo in quest'ultima delle buche. In caso contrario, in presenza di una banda riempita per meno di metà gli stati localizzati sottostanti invece potrebbero agire come donori incrementando la densità elettronica in prossimità del potenziale chimico. La presenza di buche non influirebbe sul segno della tensione di Hall perchè quest'ultima è legata all'intero complesso di elettroni di tutte le bande piene con energie inferiori al potenziale chimico.

Figura 4.2: *Resistenza di drag R_T in funzione del campo magnetico B per un sistema con diverse densità di portatori alla temperatura $T = 3.0\ K$. Viene indicato alche il prodotto calcolato delle densità di stati dei due gas bidimensionali di elettroni (line a putata). La fraccia a $B = 2.4\ T$ indica la posizione nella quale l'accoppiamento fra i layer è soppresso dallo screening. In piccolo: resistenza logitudinale R_{xx} dei 2DEGS in $k\Omega$ con $n_1 = 3.2 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ e $n_2 = 2.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$. Da Rubel et al., Phys. Rev. Lett.,* ***78****, 1763 (1996)*

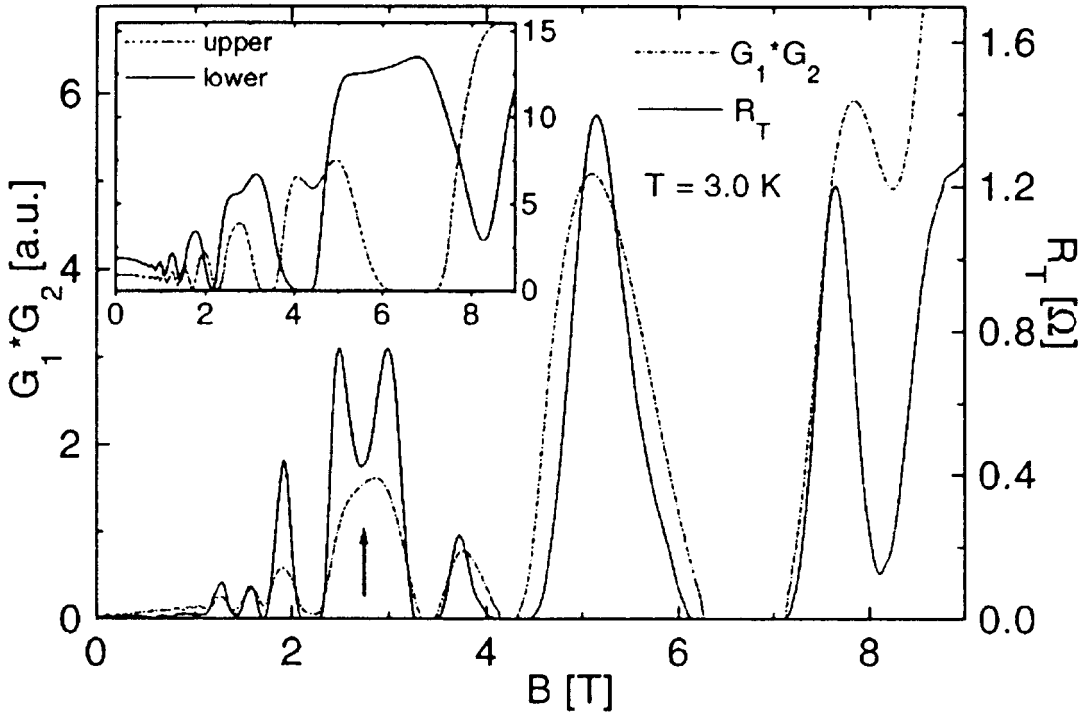
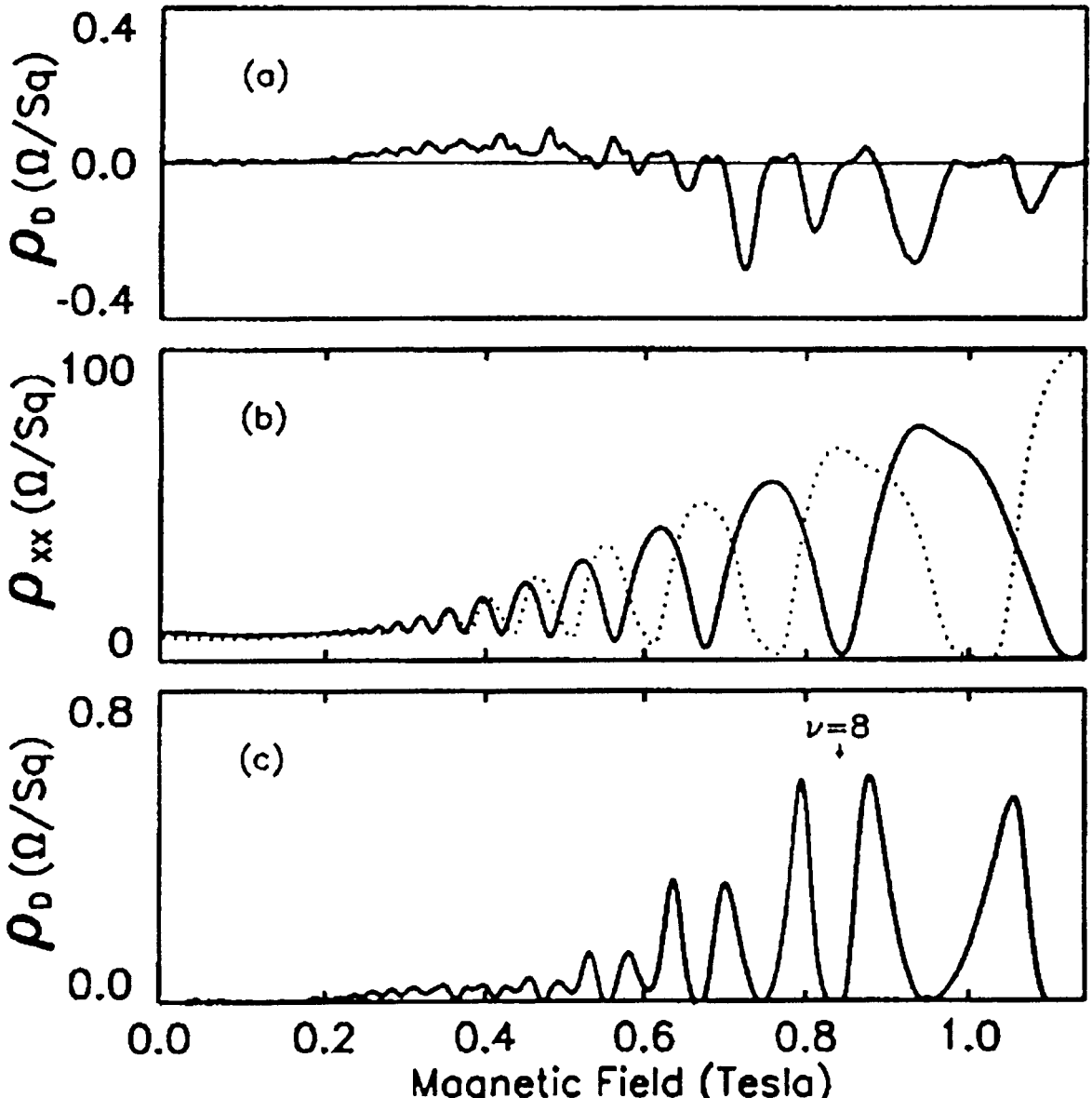

upper
lower
G1*G2
RT
T = 3.0 K
G1*G2 [a.u.]
RT [Ω]
B [T]
0
2
4
6
8
0.0
0.4
0.8
1.2
1.6
5
10
15

Figura 4.3: *Resistività di drag in funzione del campo magnetico per densità elettroniche uguali (c) e sbilanciate (a) a* $1.15K$. *La magneto-resistenza (b) longitudinale del* drive layer *è indicata sia per il* drive layer *(*1.66×10^{11} cm^{-2} *in entrambi casi) –linea continua– sia per il* drag layer *con una densità squilibrata (*1.49×10^{11} cm^{-2}*). È evidente la differenza dei fattori di riempimento in corrispondenza del drag negativo. Da Gramila et al., Phys. Rev. Lett.,* ***81****, 3219 (1998)*


0.4
0.0
-0.4
ρ_D (Ω/Sq)
(a)
100
0
ρ_{xx} (Ω/Sq)
(b)
0.8
0.0
ρ_D (Ω/Sq)
(c)
ν=8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Magnetic Field (Tesla)

Bibliografia

[1] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper: *New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance*, Phys. Rev. Lett., **45**, 494 (1980)

[2] S. Girvin: *The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries*, Lezioni tenute alla Ecole d'Eté Les Houches-Luglio 98, (1998)

[3] T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L.N.Pfeiffer, K. W. West: *Mutual Friction between Parallel Two-Dimensional Electron Systems*, Phys. Rev. Lett., **66**, 1216 (1991)

[4] M. B. Pogrebinskii: *Mutual drag of carriers in a semiconductor-insulator-semiconductor system*, Sov. Phys. Semicond., **11**, 372 (1977)

[5] P. J. Price: *Hot electron effects in heterolayers*, Physica (Amsterdam), **117B**, 750 (1983)

[6] X. G. Feng, S. Zelakiewicz, H. Noh, T. J. Ragucci, T. J. Gramila, L. N. Pfeiffer, K. W. West: *Negative Electron Drag and Hole-Like behavior in the Integer Quantum Hall Regime* , Phys. Rev. Lett., **81**, 3219 (1998)

[7] L. D. Landau, E. M. Lifsits, L. P. Pitaevskij: *Fisica statistica*, **5**, parte prima, Ed. MIR (1977)

[8] K. Huang: *Statistical Mechanics*, 2nd ed., John Wiley

[9] C. M. Wolfe, N. Holonyeak jr., G. E. Stillman: *Physical Properties of Semiconductors*, Prentice Hall International Ed., (1989)

[10] R. Kubo: *Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes*, J. Phys. Soc. Jap., **12**, 570 (1957)

[11] A. L. Fetter, J. D. Walecka: *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York, (1971)

[12] T. Ando, Y. Uemura: *Thoery of quantum transport in a two dimensional electron system under magnetic fields. Characteristics of level broadenig and transport under strong fields.* , Jour. Phys. Soc. Jap., **4**, 959 (1974)

[13] A. P. Jauho, H. Smith: *Coulomb drag between two dimensional electron systems*, Phys.Rev.B, **47**, 4420 (1993)

[14] G. D. Mahan: *Many-Particle Physics*, 2nd edition, Plenum Press, New York (1990)

[15] K. Flensberg, B. Y.-K. Hu, A. P. Jauho, J. M. Kinaret: *Linear-response theory of Coulomb drag in coupled electron systems*, Phys. Rev. B, **52**, 14761 (1995)

[16] A. Kamenev, Y. Oreg: *Coulomb drag in normal metals and superconductors: Diagrammatic approach*, Phys. Rev. B , **52**, 7516 (1995)

[17] L. Zehng, A. H. McDonald: *Coulomb drag between disordered two-dimensional electron-gas layers*, Phys. Rev. B, **48**, 8203 (1993)

[18] L. Zehng: *Interaction effects in double layer systems*, (1993) Tesi di dottorato presso l'Indiana University, (non pubblicata). Per gentile concessione del prof. A. H. McDonald.

[19] M. C. Bønsager, K. Flensberg, B. Y.-K. Hu, A. P. Jauho: *Magneto-Coulomb Drag: Interplay of Electron-Electron Interactions and Landau Quantization*, Phys. Rev. Lett., **77**, 1366 (1996)

[20] H. C. Tso, P. V. Vasilopulos, F. M. Peeters: *Direct Coulomb and Phonon-Mediated Coupling between Spatially Separeted Electron Gases*, Phys. Rev. Lett. , **68**, 2516 (1992)

[21] E. Shimshoni, S. L. Sondhi: *The Quantum Hall Effect in Drag: Inter-layer Friction in Strong Magnetic Fields*, Phys. Rev. B, **49**, 11484 (1994)

[22] N. P. R. Hill, J. T. Nicholls, E. H. Linfield, M. Pepper, D. A. Ritchie, A. R. Hamilton, G. A. C. Jones : *Frictional drag between parallel two-domensional electron gases in a perpendicular magnetic field*, J. Phys.: Cond.Matter , **8**, L557 (1996)

[23] H. Rubel, A. Fisher, W. Dietsche, K. von Klitzing, K. Eberl : *Observation of Screening in the Magneto-Coulomb Drag between Coupled Two-Dimensional Electron Systems* , Phys. Rev. Lett., **78**, 1763 (1996)

[24] I. Ussishkin, A. Stern: *Coulomb drag in compressible quantum Hall states*, Phys. Rev. B, **56**, 4013 (1997)

[25] M. C. Bønsager, K. Flensberg, B. Y.-K. Hu, A. P. Jauho: *Frictional Coulomb drag in strong magnetic fields*, Phys. Rev. B (Condensed Matter), 10314, **56**, (1997)

[26] M. P. Lilly, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, K. W. West Title: *Coulomb drag in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. Lett., 1714, **80**, (1998)

[27] N. A. Mortensen, K. Flensberg, A.-P. Jauho: *Coulomb Drag in Coherent Mesoscopic Systems*, arxiv:cond-mat/0007046v2, 16 Dec 2000