Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

12. Übungsblatt – 8. Juli 2020

Aufgabe 1. Schreiben Sie jede der folgenden Zahlen als Kettenbruch:

$$-4 \qquad \frac{5}{7} \qquad \frac{7}{5} \qquad \frac{62}{36} \qquad 0$$

Aufgabe 2. Es gibt genau eine reelle Zahl $x > 0$, so dass $x = 1 + \frac{1}{x}$.

(a) Bestimmen Sie x. Ist x rational oder irrational?

(b) Finden Sie die Kettenbruchentwicklung $x = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$

(c) Sei $x_n := [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ der n-te Teilkettenbruch. Zeigen Sie, dass $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl[1] ist.

Aufgabe 3. Wir bezeichnen mit $K(\frac{p}{q})$ den Kreis der Kreispackung von Farey, der zum (gekürzten) Bruch $\frac{p}{q}$ gehört (das ist der Kreis vom Radius $\frac{1}{2q^2}$, der die Zahlengerade von oben im Punkt $\frac{p}{q}$ berührt).

(a) Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunkts von $K(\frac{p}{q})$?

(b) Zeigen Sie: Wenn sich $K(\frac{a}{b})$ und $K(\frac{c}{d})$ berühren, dann berühren beide auch den Kreis $K(\frac{a+c}{b+d})$.

Aufgabe 4. Sei $x = [u, v, u, v, u, v, \ldots]$ eine reelle Zahl mit unendlichem periodischem Kettenbruch der Periode 2. Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen a, b und c gibt, so dass $a \neq 0$ und $ax^2 + bx + c = 0$.

[1] siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 5: $f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.