Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

11. Übungsblatt – 1. Juli 2020

Aufgabe 1.

(a) Berechnen Sie $\varphi(100)$.

(b) Wie lauten die letzten beiden Ziffern der folgenden Zahlen im Dezimalsystem?

$$3^{323} \qquad 4^{1000} \qquad 37^{230} \qquad 124^{100}$$

Aufgabe 2.

(a) Florians öffentlicher RSA-Schlüssel lautet $(a, n) = (7, 33)$. Verschlüsseln Sie die Nachricht CHOCOLAT.

(b) Florian möchte Ihnen antworten; Sie wählen $(p, q, a) = (7, 11, 11)$ und senden ihm Ihren öffentlichen Schlüssel. Entschlüsseln Sie seine Antwort: $(7, 38, 51, 14, 38)$.

(c) Knacken Sie Florians privaten Schlüssel.

Aufgabe 3. Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, und $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$. Sei x eine reelle Zahl mit der Eigenschaft $x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_n = 0$. Zeigen Sie, dass x entweder ganz oder irrational ist.

Hinweis: Führen Sie die Annahme $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ zu einem Widerspruch, indem Sie zeigen, dass jeder Primfaktor von b auch a teilen muss.

Aufgabe 4. Folgern Sie aus der Aussage der dritten Aufgabe:

(a) $\sqrt{2}$ ist irrational.

(b) $\sqrt{p}$ ist irrational, für jede Primzahl p.

(c) Der goldene Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist irrational.

(d) Wenn $m \geqslant 1$ eine natürliche Zahl ist, die nicht die n-te Potenz einer natürlichen Zahl ist, dann ist $\sqrt[n]{m}$ irrational.