Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

10. Übungsblatt – 24. Juni 2020

Aufgabe 1. Gehen Sie den Beweis von Fermats Zwei-Quadrate-Satz noch einmal anhand des Beispiels $p = 37$ durch; das heißt:

(a) Prüfen Sie, ob $37 \equiv 1 \mod 4$ gilt.
(b) Finden Sie alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, welche die Gleichung $37 = 4xy + z^2$ lösen. *Hinweis:* Es sind insgesamt 7.
(c) Zeichnen Sie die zugehörigen Windmühlen/Dachterrassen.
(d) Verbinden Sie einerseits die Paare von Windmühlen mit demselben Umriss und anderseits jede Windmühle (x, y, z) mit der Windmühle (y, x, z).
(e) Schreiben Sie 37 als Summe von zwei Quadraten.

Aufgabe 2. Welche Restklassen modulo 8 können durch eine Summe von drei Quadraten repräsentiert[1] werden?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $3|(2n + n^3)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.

(a) Sei p eine Primzahl. Wieviele natürliche Zahlen gibt es zwischen 0 und p, die zu p teilerfremd sind?
(b) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Wieviele natürliche Zahlen gibt es zwischen 0 und pq, die zu pq teilerfremd sind?

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $a^{561} \equiv a \mod 561$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $a^{561} \equiv a \mod p$ für $p = 3, 11$ und 17. Unterscheiden Sie jeweils zwei Fälle: $a \equiv 0 \mod p$ und $a \not\equiv 0 \mod p$.

[1] Eine Restklasse R wird durch eine ganze Zahl a *repräsentiert*, wenn $\overline{a} = R$.