Dr. F. Misev — SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

9. Übungsblatt – 17. Juni 2020

Aufgabe 1.

(a) Sei $n = p \cdot q$, wobei p und q zwei verschiedene Primzahlen sind und sei $a \in \mathbb{Z}$. Lösen Sie das Kongruenzsystem

$$\left[\begin{array}{ll} x \equiv a & \mod p \\ x \equiv a & \mod q \end{array}\right.$$

(b) Verwenden Sie (a) zusammen mit dem Chinesischen Restsatz, um die folgenden simultanen Kongruenzen zu lösen:

$$\left[\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \mod 6 \\ x \equiv 5 & \mod 14 \\ x \equiv -2 & \mod 21 \end{array}\right.$$

Aufgabe 2.

(a) Sei n eine natürliche Zahl mit $n \equiv 3 \mod 4$. Zeigen Sie, dass n sich nicht als Summe zweier Quadrate darstellen lässt.
Hinweis: Rechnen Sie modulo 4: Welche Reste kann eine Zahl der Form a^2+b^2 bei Division durch 4 haben, wenn a, b natürliche Zahlen sind?

(b) Seien $n = a^2 + b^2$ und $m = c^2 + d^2$ Summen zweier Quadrate. Zeigen Sie, dass auch das Produkt $n \cdot m$ die Summe von zwei Quadraten ist. *Hinweis:* Vergleichen Sie $(ac + bd)^2$ mit $n \cdot m$.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Zeigen Sie:

(a) Es existieren eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine ungerade natürliche Zahl u, so dass $n = 2^k u$.

(b) Falls $a, b \in \mathbb{Z}$ und $u \in \mathbb{N}$, dann gilt $(a - b)|(a^u - b^u)$.

(c) Falls 2^n+1 eine Primzahl ist, dann existiert eine natürliche Zahl k, so dass $n = 2^k$.
Hinweis: (a), (b) und $+1 = -(-1)^u$ falls $u \in \mathbb{N}$ ungerade ist.

Bemerkung: Zahlen der Form $F_k := 2^{2^k} + 1$ nennt man *Fermat-Zahlen.* Pierre de Fermat hat im 17. Jahrhundert vermutet (und sogar behauptet), dass alle F_k prim seien. Es ist heute bekannt, dass F_k für $5 \leqslant k \leqslant 32$ zusammengesetzt ist (für $k = 5$ hat das bereits Leonhard Euler gesehen). Es ist unbekannt, ob ein $k \geqslant 33$ existiert, so dass F_k eine Primzahl ist.