Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

8. Übungsblatt – 10. Juni 2020

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Kongruenzsystems

$$\left[\begin{array}{ll} x \equiv 5 & \bmod 6 \\ x \equiv 18 & \bmod 35 \\ x \equiv -2 & \bmod 11 \end{array}\right.$$

Aufgabe 2. Lösen Sie das folgende Kongruenzsystem.

$$\left[\begin{array}{rll} 14x - 7y & \equiv 10 & \bmod 26 \\ 3x + 8y & \equiv -3 & \bmod 26 \end{array}\right.$$

Gesucht sind also alle Paare $(\overline{x}, \overline{y})$ mit $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, so dass x und y die beiden Kongruenzen erfüllen.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass x eine lineare Kongruenz erfüllt, in der x die einzige Unbekannte ist (ähnlich, wie wenn Sie ein gewöhnliches System von linearen Gleichungen lösen würden).

Aufgabe 3. Wenn p und p^2+2 beide Primzahlen sind, dann ist $p = 3$.
Hinweis: Betrachten Sie die die möglichen Restklassen von p und p^2+2 modulo n. Für welche n erhält man hilfreiche Informationen?

Aufgabe 4. Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ ist wie folgt definiert: $a_1 := 0$, $a_2 := 1$, und a_{n+2} besteht aus den Ziffern von a_{n+1}, gefolgt von den Ziffern von a_n. Zum Beispiel: $a_3 = 10$, $a_4 = 101$, $a_5 = 10110$, und so weiter.

(a) Welche ist die kleinste natürliche Zahl $n > 1$ mit $11|a_n$?
(b) Zeigen Sie, dass $11|a_n$ genau dann, wenn $n \equiv 1 \mod 6$.

Hinweis: Sei f_n die Anzahl Ziffern von a_n. Nutzen Sie diese Definition, um a_{n+2} rekursiv als Linearkombination von a_{n+1} und a_n auszudrücken. Studieren Sie die Restklassen von f_n modulo 2 und schließlich die Restklassen von a_n modulo 11.