Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

6. Übungsblatt – 27. Mai 2020

Aufgabe 1. Wenn n ungerade ist, ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die letzte Ziffer einer Quadratzahl nie $2, 3, 7$ oder 8 sein kann. Ist $15\,382\,335$ eine Quadratzahl?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für jede der folgenden linearen Kongruenzen die Lösungsmenge.

(a) $3x \equiv 5 \mod 7$
(b) $12x \equiv 15 \mod 22$
(c) $19x \equiv 42 \mod 50$
(d) $18x \equiv 42 \mod 50$

Aufgabe 4. Sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl und $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zwei Restklassen modulo n. Wir sagen, $\overline{b}$ sei *invers* zu $\overline{a}$, wenn $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$.

(a) Finden Sie eine Zahl $b \in \mathbb{Z}$, so dass $\overline{b}$ invers ist zu $\overline{3}$, modulo 11.
(b) Gibt es $b \in \mathbb{Z}$, so dass $\overline{b}$ invers ist zu $\overline{3}$, modulo 12?
(c) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass es zu jeder Restklasse modulo p, außer zu $\overline{0}$, genau eine inverse Restklasse gibt.
Hinweis: Satz 9 aus der Vorlesung.
(d) Sei p prim, $2 \leqslant a \leqslant p - 2$ und $\overline{b}$ die inverse Restklasse zu $\overline{a}$ modulo p. Zeigen Sie: $\overline{a} \neq \overline{b}$. Schließen Sie daraus, dass

$$\overline{2} \cdot \overline{3} \cdot \ldots \cdot \overline{p-2} = \overline{1} \qquad \text{(modulo } p\text{)}.$$

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass n genau dann eine Primzahl ist, wenn $(n-1)! \equiv -1 \mod n$.