Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

5. Übungsblatt – 20. Mai 2020

Aufgabe 1. Finden Sie $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $ua + vb = \operatorname{ggT}(a, b)$, für die folgenden Zahlenpaare (a, b).

$$(2,3) \qquad (110,-70) \qquad (64,72) \qquad (-26,75) \qquad (2,10\,000\,003)$$

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z_d, z_{d-1}, \ldots, z_2, z_1, z_0$ die Ziffern von n im Dezimalsystem (das heißt $n = \sum_{k=0}^{d} z_k 10^k$). Verwenden Sie Kongruenzen, um zu zeigen, dass die Zahl n genau dann durch ...

(a) 3 teilbar ist, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3 teilbar ist.
(b) 5 teilbar ist, wenn z_0 (die letzte Ziffer) durch 5 teilbar ist.
(c) 11 teilbar ist, wenn die alternierende Summe ihrer Ziffern durch 11 teilbar ist. (Die *alternierende Summe* der Zahlen $z_0, z_2, \ldots, z_d$ ist definiert als $\sum_{k=0}^{d}(-1)^k z_k$.)

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Primfaktorzerlegungen der folgenden Zahlen. *Hinweis:* Sie können dazu Aufgaben 2 und 4 vom 3. Übungsblatt und Aufgabe 2 von diesem Übungsblatt zu Hilfe nehmen.

$$512 \qquad 1\,350 \qquad 2\,295 \qquad 23\,667 \qquad 283$$

Aufgabe 4. Seien $u, v, k \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl mit $p^k | uv$ und $p \nmid v$. Zeigen Sie, dass $p^k | u$.
Hinweis: Induktion über k und Lemma 3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 5. Seien a und b zwei teilerfremde Teiler von c. Zeigen Sie, dass $ab | c$.