Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

2. Übungsblatt – 29. April 2020

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie alle positiven Teiler von 44 und -180 und berechnen Sie $\mathrm{ggT}(44, -180)$.

(b) Bestimmen Sie Quotient und Rest für folgende Divisionen:

$$72 : 22 \qquad 1770 : 314 \qquad -88 : 5 \qquad -2 : 37$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung: Falls $c|a$ und $c|b$, dann auch $c|(au + bv)$, für alle $u, v \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $5|(n^5 - n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Sei $a \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 2$. Definiere die *Höhe* $h(a)$ als die größte Zahl n, so dass Euklids Algorithmus n Schritte braucht, um $\mathrm{ggT}(a, b)$ zu berechnen, wobei b alle ganzen Zahlen mit $0 < b < a$ durchläuft (d.h. n ist so, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = r_{n-1}$).

(a) Zeigen Sie, dass $h(a) = 1$ genau dann, wenn $a = 2$.

(b) Berechnen Sie $h(a)$ für alle $a \leqslant 8$.

Aufgabe 5. Die *Fibonacci-Zahlen* f_n sind definiert durch $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle $n \geqslant 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $0 \leqslant f_n < f_{n+1}$ für alle $n \geqslant 2$.

(b) Was geschieht, wenn man den Euklidschen Algorithmus auf zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_{n+2} und f_{n+1} anwendet? Zeigen Sie, dass $h(f_{n+2}) \geqslant n$. (h ist die *Höhe* aus Aufgabe 4.)