Dr. F. Misev SoSe 2020, Uni Regensburg

Elementare Zahlentheorie

1. Übungsblatt – 22. April 2020

Aufgabe 1. Was ist größer,

$$\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3} \quad \text{oder} \quad \sqrt[2]{2+3}\ ?$$
$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{2+3}\ ?$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass eine natürliche Zahl genau dann durch 9 teilbar ist, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n Folgendes gilt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n(n+1)(2n+1)$ durch 3 teilbar.

(c) Was geschieht, wenn wir in (a) die Quadrate der geraden Zahlen weglassen, also $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots$?

Aufgabe 4.

(a) Seien a und b zwei ganze Zahlen mit $a \leqslant b$. Wir sagen, die ganze Zahl c sei *zwischen* a und b, wenn $a \leqslant c \leqslant b$ gilt. Wieviele ganze Zahlen liegen zwischen 100 und 1000? Und zwischen a und b?

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$\frac{1}{2} \quad \leqslant \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \quad \leqslant \quad \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass sich jede quadratische Dachterrasse der Seitenlänge 2^n durch Steine der unten gezeigten Form überdecken läßt, so dass die Steine sich nicht überschneiden und genau eine Ecke für die Leiter freibleibt. In der Skizze ist $n = 3$.