Beispiel: PID-Regelalgorithmus

Zur Vertiefung der im letzten Abschnitt behandelten Fragen soll die numerische Aufbereitung eines PID-Algorithmus mit *Festpunktarithmetik* behandelt werden.

Den zugrundeliegenden, einschleifigen Regelkreis zeigt Bild 86. Die Rechenschaltung eines idealen PID-Reglers muß einer Differentialgleichung der folgenden Form gehorchen:

$$y = K_p \left[e + \frac{1}{T_n} \int_{-\infty}^{t} e(\tau)\, d\tau + T_v \cdot \frac{de}{dt} \right]$$

$e = w - x$ (Regeldifferenz),
K_p Proportionalbeiwert,

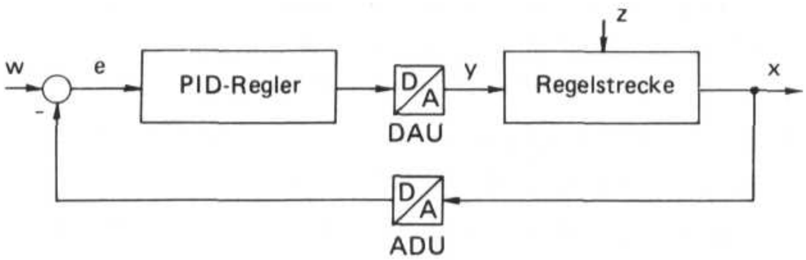

Bild 86. Eingrößenregelung.
w Führungsgröße (Sollwert), e Regeldifferenz, y Stellgröße, z Störgröße, x Regelgröße (Istwert).

X = 100%/K (Proportionalbereich),
T_n Nachstellzeit,
T_v Vorhaltzeit.

Für die digitale Berechnung dieser Reglergleichung muß auf eine zeitdiskrete Näherung zurückgegriffen werden, in der das Integral durch die Summe der Zuwächse (Rechteckintegration) sowie der Differentialquotient durch den Differenzenquotient ersetzt werden:

$$y_i = K_p \left[e_i + \frac{T_s}{T_n} \sum_{m=-\infty}^{m=i} e_m + \frac{T_v}{T_s} (e_i - e_{i-1}) \right] ,$$

mit

T_s = Abtastzeit.

Der Index i deutet die zeitdiskrete Berechnung zu den Tastzeitpunkten $t_i = i \cdot T$ an, das heißt, alle T Sekunden wird die Gleichung einmal berechnet. Um ein ähnliches Verhalten wie das der Differentialgleichung zu erzielen - man nennt das dann „quasikontinuierliches" Verhalten - muß die Abtastzeit T_s genügend klein gewählt werden. Als Faustformel gilt: T_s soll etwa 1/10 der bestimmenden Zeitkonstanten des geschlossenen Regelkreises betragen. Für verfahrenstechnische Regelkreise ergeben sich dabei Werte T von etwa 1 bis 20 s.
Der angegebene Algorithmus wird *Stellungsalgorithmus* genannt, da jeweils der neue Wert der Stellgröße y_i berechnet wird. Eine Variante hierzu stellt der *Geschwindigkeitsalgorithmus*

$$\Delta y_i = K_p \cdot \left[e_i - e_{i-1} + \frac{T_s}{T_n} e_i + \frac{T_v}{T_s} \cdot (e_i - 2e_{i-1} + e_{i-2}) \right],$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$

dar, bei dem nur die jeweiligen Stellinkremente Δy_i berechnet werden. Deren Summation zum tatsächlichen Stellausschlag y_i kann entweder im Stellglied (integrierendes Stellglied) oder numerisch im Regler erfolgen, gemäß

$$y_i = \sum_{m=-\infty}^{m=i} \Delta y_m .$$

Im Gegensatz zum Stellungsalgorithmus darf beim Geschwindigkeitsalgorithmus allerdings der Integralanteil niemals weggelassen werden, da sonst im eingeschwungenen Zustand ($e_i = e_{i-1} = e_{i-2}$) eine beliebig große Regeldifferenz bestehen bleiben kann.
Im folgenden soll nur der Geschwindigkeitsalgorithmus genauer betrachtet werden. Bei der Berechnung werden drei Koeffizienten benutzt, die sich aus den Reglerparametern zusammensetzen. Für verfahrenstechnische Anwendungen sind hierfür die im Bild 87 angegebenen Wertebereiche und Auflösungen voll ausreichend. Diese Koeffizienten müssen anfänglich aus den eingegebenen Reglerparametern berechnet werden, wie im Bild 87 angegeben. In Verbindung mit der über eine Echtzeituhr einzustellenden Abtastzeit T_s (etwa im Bereich 1 bis 100 s) ergibt dies einen extrem großen Variationsbereich der Parameter, verglichen mit analogen Reglern. Der Istwert x werde mit einem 10-Bit-A/D-Umset zer gewandelt (Zahlenwert X_i).

Er wird als dimensionslos auf den Bereich

$$0 \leqslant x_i \leqslant +1 \qquad (0 \text{ bis } 100\%)$$

normiert betrachtet, liegt also in der (gedachten) Form [S 0.10] (bedeutet keine Stelle vor und 10 Stellen nach dem Dualpunkt) als Festpunktzahl vor. Dies ist durch eine Anpassung vor dem ADU auf die Normsignale (0 bis 20 mA oder 0 bis 10 V) erreichbar. Besitzen die Signale einen „lebenden Nullpunkt" (4 bis. 20 mA oder 2 bis 10V), dann muß allerdings noch eine kleine Umrechnung zur Abbildung auf diesen Bereich erfolgen.

Weiterhin kann angenommen werden, daß der Bereich von x mit dem Regelbereich übereinstimmt; für den digital ein-stellbaren Sollwert w gilt also auch

$$0 \leqslant w_i \leqslant +1 \qquad (0 \text{ bis } 100\%),$$

das heißt, die Skalierung ist [S 0.10]. Für die Regeldifferenz e folgt daraus

$$|e_i| = |w_i - x_i| \leqslant 1,$$

also ebenfalls noch die Skalierung [S 0.10]. Bei der weiteren Berechnung der einzelnen Glieder des Geschwindigkeitsalgorithmus ergeben sich gemäß den Regeln der Algebra die im Bild 87 angegebenen Skalierungen, wenn im gesamten sich jeweils ergebenden Zahlenbereich unter allen Bedingungen keine Ziffernstelle verloren gehen soll.

Bei der Realisierung ist zu überlegen, ob die im Laufe der Rechnung immer größere Zahl signifikanter Stellen ohne negativen Einfluß auf das Ergebnis gekürzt werden kann. In Anbetracht der Wortlänge des Prozessors ist dies immer da von Interesse, wo die Stellenzahl wieder ein zusätzliches Wort zur Darstellung erfordert. Die berechnete Stellgröße Y_i werde über einen 8-Bit-D/A-Umsetzer ausgegeben, wo-bei auch hier eine dimensionslose Normierung auf den Bereich

$$0 \leqslant y \leqslant +1 \qquad (0 \text{ bis } 100\%)$$

angenommen wird. Damit kann nur eine Festpunktzahl der Form [S 0.8] ausgegeben werden. Ein berechneter Stellwert <0 oder > 1 führt also zum Anschlag der Stellgröße. Berechnet man jedoch die Stellgröße tatsächlich nur in dieser Darstellung, treten zwei sehr unangenehme Effekte auf:

• Durch die Bereichsbegrenzung tritt ein sogenannter Anfahr-Effekt (windup) auf, der das Regelverhalten an den Anschlägen verschlechtert.

• Durch das „Abschneiden" von Stellen nach dem Punkt werden Regelungenauigkeiten verursacht, die bei großem T_n /T_S zu einer erheblichen bleibenden Regeldifferenz führen können. Dieser Effekt wird „integraler Offset" genannt. Er tritt auf, wenn die Stellinkremente kleiner sind als die Auflösung des D/A-Umsetzers.

Zur Vermeidung des Anfahreffektes ist folgendes zu tun: Die Stellgröße y_i wird intern nicht begrenzt berechnet, sondern nur vor der Ausgabe auf den D/A-Umsetzer. Solange die intern berechnete Stellgröße außerhalb der Anschläge liegt, wird noch zusätzlich der Integralanteil im Regelalgorithmus „abgeschaltet" also nicht berechnet.

Zur Vermeidung des integralen Offset muß die Stellgröße mit einer höheren Auflösung, als der DAU tatsächlich erfordert, akkumuliert werden, damit sich nach einiger Zeit kleinere Stellinkremente doch am Reglerausgang auswirken können.

Wird z.B. die Stellgröße y_i intern in Format [S 6.17] (also 24 Bit = 3 Byte) akkumuliert — ausgegeben wird nur [S 0.8]! — so ergibt sich als ungünstigster Fall mit dem minimalen Wert für K_p (= 0,25) und dem maximalem Wert für T_n/T_s (= 127) wegen der feinsten Auflösung von 2^{-17} folgende bleibende Regelabweichung:

$$K_p \cdot \frac{T_s}{T_n} \quad |e_i| = 0{,}002 \; |e_i| > 2^{-17} = 7{,}63 \cdot 10^{-6},$$

$$|e_i| > 3{,}88 \cdot 10^{-3} \; .$$

Es entsteht damit ein Offset von etwa 4°/oo des Wertebereiches der Regeldifferenz, dies ist das vierfache der Auflösung von e_i (l°/oo). Wird für Δy_i und y_i diese Skalierung benutzt, so kann die Stellenzahl der vorher berechneten Glieder sinngemäß auch gekürzt werden. Alle Daten können dann durch 1 Byte (Reglerparameter), 2 Byte (x, w, e und deren Differenzen) oder 3 Byte dargestellt werden.

Bild 88 zeigt ein Struktogramm, welches den prinzipiellen Rechnungsablauf wiedergibt. Zu beachten sind, daß vor Additions- bzw. Subtraktionsoperationen die Operanden so verschoben werden müssen, daß der gedachte Punkt an der gleichen Stelle steht. Für die Multiplikations- bzw. Divisionsoperationen werden übliche Routinen für (vorzeichenbehaftete) ganze Zahlen (integer) entsprechender Stellenzahl benutzt.

Anzumerken bleibt, daß das Problem bei Verwendung von Gleitpunktzahlen (Bild 85) und entsprechender Gleitpunkt-arithmetik zunächst numerisch einfacher zu behandeln ist. Überlegungen zur Genauigkeit und zur Normierung der Ein/Ausgangsgrößen müssen aber auch hier angestellt werden, um die genannten Effekte zu vermeiden.

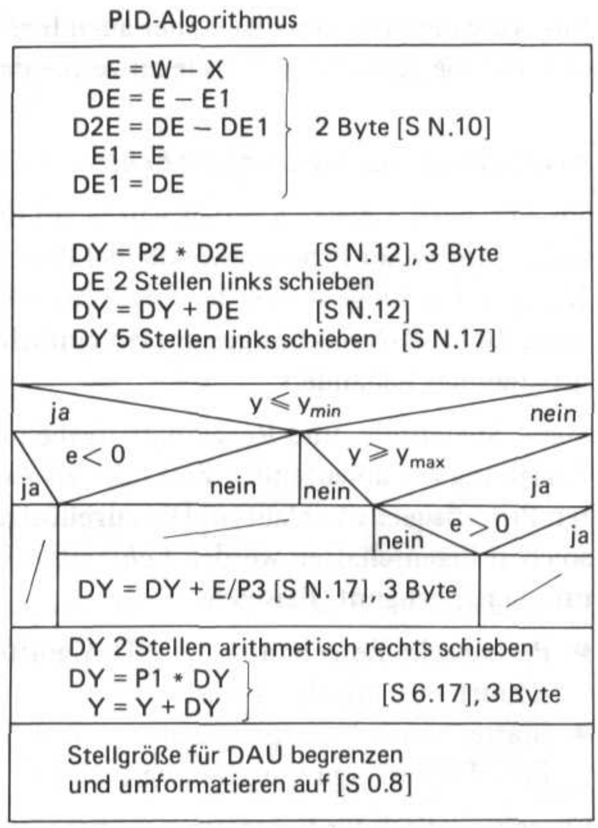

Bild 88. Struktogramm zur Berechnung des PID-Geschwindigkeitsalgorithmus.

Reglerparameter	Minimalwert	Maximalwert	Auflösung
Xp = 100%/Kp	3,2%	400%	variabel
T_v	$0,25 \bullet T_s$	$31,75 \bullet T_s$	$T_s/4$
T_n	$1 \bullet T_s$	$127 \bullet T_s$	T_s

Koeffizient	Minimalwert	Maximal-wert	Auf-lösung	Festpunkt-Skalierung
$P_1 = K_P$	0,25	31,75	0,25	[S5.2]
$P_2 = T_n/T_s$	0,25	31,75	0,25	[S5.2]
$P_3 = T_n/T_s$	1	127	1	[S7.0]

Größe	Maximal-wert	Skalierung	Bemerkung
x_i	1	[s 0.10]	10-Bit-Wandlung unipolar
w_i	1	[s 0.10]	nur positiv
e_i	1	[s 0.10]	
$e_i - e_{i-1}$	2	[s 1.10]	Werte > 1 nur bei Soll-wertsprung möglich
e_i/P_3	1	[s 0.17]	I-Anteil
$(e_i-2e_{i-1}+e_{i-2})$	4	[s 2.10]	
$P_2 \bullet (\ldots)$	127	[s 7.12]	D-Anteil
Klammerausdruck			
[...]	130	[s 8.17]	
$\Delta y_i = P_1 \bullet$ [...]	4127,5	[s 13.19]	33 Bit !
y_i	**?**	**?**	noch offen

Bild 87. Wertebereiche der Reglerparameter und formale Skalierung des PID-Geschwindigkeitsalgorithmus.