Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 9

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechende Briefkästen]

Aufgabe 1 Zylinderkoordinaten .... [6P]

In der Vorlesung wurden krummlinige Koordinaten eingeführt und als erstes Beispiel die Polarkoordinaten diskutiert. Eine Verallgemeinerung dieser zwei-dimensionalen Koordinaten auf drei Dimensionen sind die sogenannten Zylinderkoordinaten. Die kartesischen Koordinaten werden wie folgt durch diese dargestellt:

$$\begin{aligned} x =& \rho\cos(\phi), \\ y =& \rho\sin(\phi), \\ z =& z, \end{aligned}$$

mit $\rho > 0$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, $z \in (-\infty, \infty)$.

a) Berechnen Sie die Tangentenvektoren

$$\mathbf{T}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}, \text{ mit } u_i = \rho, \phi, z.$$

b) Bestimmen Sie die Basisvektoren der Zylinderkoordinaten in der kartesischen Basis. Zeigen Sie, dass diese eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

c) Geben Sie das infinitesimale Linienelement $\mathrm{d}\mathbf{r}$ in Zylinderkoordinaten an und berechnen Sie $|\mathrm{d}\mathbf{r}|^2$.

d) Bestimmen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ (in kartesischen Koordinaten $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$) in Zylinderkoordinaten geometrisch.

e) Geben Sie die allgemeine Form der Geschwindigkeit $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ in Zylinderkoordinaten, ausgedrückt durch die Basisvektoren $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_z$ an.

f) Bestimmen Sie die kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ als Funktion der Basisvektoren der Zylinderkoordinaten $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_z$.

Aufgabe 2 *Vektorfeld in krummlinigen Koordinaten .... [3P]

Stellen Sie das in kartesischen Koordinaten ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$) gegebene Vektorfeld $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a} \;=\; \left(-x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^3\right)\mathbf{e}_1 \;+\; \left(x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_2\right)\mathbf{e}_2 \;+\; 7x_3\mathbf{e}_3$$

in der Basis der Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten dar.

Aufgabe 3 * Parabolische Koordinaten .... **[3P]**

Die parabolischen Koordinaten $u, v \in \mathbb{R}^+$ sind gegeben durch die Transformationsgleichungen

$$x = uv, \quad y = (v^2 - u^2)/2.$$

a) Skizzieren Sie in der x, y-Ebene die Kurven mit konstantem u bzw. v.

b) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$, und zeigen Sie, dass sie aufeinander senkrecht stehen.

c) Berechnen Sie das Linienelement und das Flächenelement in diesen Koordinaten.

Aufgabe 4 * Nabla in Zylinderkoordinaten .... **[5P]**

Drücken sie den Nabla-operator $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ in den Zylinderkoordinaten $(\rho,\ \phi,\ z)$ aus.

Aufgabe 5 Divergenz in krummlinigen Koordinaten .... **[6P]**

Gegeben sei ein hinreichend oft stetig partiell differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_{u_i} \mathbf{e}_{u_i}$ in krummlinigen Koordinaten, wobei $\mathbf{e}_{u_i}$ die krummlinigen, normierten Basisvektoren und a_{u_i} die entsprechenden Komponenten des Vektorfeldes in dieser Basis bezeichnen. Für die normierten Basisvektoren gilt

$$\mathbf{e}_{u_i} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{b_{u_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Divergenz dieses Vektorfeldes in den krummlinigen Koordinaten durch

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{b_{u_1} b_{u_2} b_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(b_{u_2} b_{u_3} a_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(b_{u_3} b_{u_1} a_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(b_{u_1} b_{u_2} a_{u_3})\right] \tag{1}$$

gegeben ist.

a) Drücken Sie zunächst ∇ in den krummlinigen Koordinaten aus und zeigen sie:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{b_{u_i}} \frac{\partial a_{u_i}}{\partial u_i} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{a_{u_j}}{b_{u_i}} \mathbf{e}_{u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{u_j}}{\partial u_i}$$

b) Zeigen Sie, dass

$$b_{u_j} \frac{\partial}{\partial u_i} \mathbf{e}_{u_j} + \frac{\partial b_{u_j}}{\partial u_i} \mathbf{e}_{u_j} = b_{u_i} \frac{\partial \mathbf{e}_{u_i}}{\partial u_j} + \frac{\partial b_{u_i}}{\partial u_j} \mathbf{e}_{u_i}$$

gilt, indem Sie $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_j \partial u_i}$ nutzen.

c) Multiplizieren Sie nun die Gleichung in b) mit $\mathbf{e}_{u_i}$ skalar, um die Doppelsumme in a) umschreiben zu können, um schließlich Gl. (1) zu zeigen.