Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 8

[Beachte: Aufgaben mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechende Briefkästen.]

Aufgabe 1 Divergenz und Rotation* .... [4P]

a) Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{r}$, wobei $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^T$.

b) Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (x + 3y, y - 2z, x + \alpha z)^T$ in Kartesischer Basis. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$, $\forall\, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$.

c) Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)^T$ in Kartesischer Basis. Bestimmen Sie $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ im Punkt $(1, -1, 1)^T$.

d) Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (x + 2y + \alpha z)\boldsymbol{e}_x + (\beta x - 3y - z)\boldsymbol{e}_y + (4x + \gamma y + 2z)\boldsymbol{e}_z$. Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, $\forall\, \boldsymbol{r}, \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 Identitäten der Vektoranalysis* .... [6P]

Beweisen Sie die folgenden Identitäten mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors. Dabei sind $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ beliebige differenzierbare Vektorfelder und $\varphi(\boldsymbol{r})$ ein beliebiges differenzierbares skalares Feld.

a) $\boldsymbol{\nabla} \times (\varphi \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi) \times \boldsymbol{A} + \varphi\, \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$.

b) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})$.

c) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{0}$.

d) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$.

e) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{A}$.

f) $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$.

Aufgabe 3 Ein Vektorfeld .... [4P]

Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

mit einem konstanten Vektor $\boldsymbol{\omega}$.

a) Wählen Sie die z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems in Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ und geben Sie das Feld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ in kartesischen Koordinaten x, y, z an. Skizzieren Sie das Feld in der Ebene $z = 0$.

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$.

Aufgabe 4 Äquipotentialflächen .... **[5P]**

Gegeben sei nun das Vektorfeld $\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}e^{r^2}$.
Beantworten Sie die folgenden Fragen, *ohne* das Potential auszurechnen.

a) Besitzt das Feld Quellen oder Wirbel?

b) Was ist die Richtung des stärksten Anstiegs des Potentials im Punkt $(1, 1, 0)^T$?

c) Wie sehen die Äquipotentialflächen aus? Machen Sie sich bewusst wie das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ dazu steht.

Aufgabe 5 Laplace-Operator* .... **[4P]**

a) Berechnen Sie div(grad U) für das skalare Feld $U: \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}.$$

Die Zuordnung $U \mapsto$div(grad U) heißt Laplace-Operator. Statt div(grad U) schreibt man auch ΔU.

b) Der Laplace-Operator im Zweidimensionalen in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi: \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $\phi(r) = \ln(r)$ im Zweidimensionalen eine harmonische Funktion ist, d.h eine spezielle Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ darstellt. Dabei ist $r = |\boldsymbol{r}|$ der Betrag des Ortsvektors im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6 Ebene Bahnkurve .... **[3P]**

In ebenen Polarkoordinaten r, φ sei die Bahnkurve eines Teilchens durch

$$\mathbf{r}(\varphi) = r(\varphi)\hat{\mathbf{r}}, \quad r(\varphi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

mit $0 \leq \epsilon < 1$ beschrieben.

a) Berechnen Sie die Minimal- und Maximalwerte von r, und skizzieren Sie die Bahnkurve.

b) Berechnen Sie einen Einheitsvektor $\hat{\mathbf{t}}$ tangential zur Bahnkurve.