Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 7

[Beachte: Aufgaben mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechende Briefkästen.]

Aufgabe 1 Totales Differential* .... [6P]

a) Zeigen Sie, dass es sich bei

$$\omega(x,y) = -(y^2+xy)\mathrm{d}x + (x^2+xy^3)\mathrm{d}y$$

nicht um ein vollständiges (=totales) Differential handelt.

b) Bilden Sie nun das Differential

$$\mathrm{d}g = \frac{1}{xy^2}\omega(x,y) = a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y.$$

Bestimmen Sie $a(x,y), b(x,y)$ und zeigen Sie, dass es vollständig ist.

c) Es soll nun die Funktion $g(x,y)$ bestimmt werden.

i) Integrieren Sie dazu $a(x,y)$, was gerade $\partial_x g(x,y)$ entspricht, in x. Erfüllt die so gefundene Funktion $g_1(x,y)$ auch die Integrabilitätsbedingung $\partial_y g_1(x,y) = b(x,y)$?

ii) Integrieren Sie nun die Beziehung $\partial_y g(x,y) = b(x,y)$ in y. Erfüllt die so gefundene Funktion $g_2(x,y)$ auch die Integrabilitätsbedingung $\partial_x g_2(x,y) = a(x,y)$?

iii) Wie lassen sich die beiden Resultate g_1 und g_2 in Einklang miteinander bringen? Bestimmen Sie $g(x,y)$.

Aufgabe 2 Taylorreihe in mehreren Dimensionen* .... [4P]

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2y}\cos(x) + \mathrm{e}^{2y}\sin(x)\,.$$

Gesucht ist die Entwicklung von $f(x,y)$ um den Punkt $(x,y) = (0,0)$ bis zur zweiten Ordnung. Berechnen Sie diese

a) direkt als zweidimensionale Taylorreihe.

b) als Produkt zweier eindimensionaler Taylorreihen für $a(x)$ und $b(y)$, indem Sie die Funktion als Produkt $f(x,y) = a(x)b(y)$ auffassen.

Aufgabe 3 Charakterisierung von Raumkurven .... [6P]

Gegeben sei die Schraubenlinie

$$\mathbf{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), vt), \quad R, v > 0 \text{ und konstant.}$$

a) Finden Sie die Bogenlänge $s(t)$ (mit beliebigem Bezugspunkt t_0), das begleitende Dreibein, d. h. $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ (siehe Vorlesung), die Krümmung κ und die Torsion τ.

b) Beweisen Sie die dritte Frenetsche Formel

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}s} = \tau\hat{\mathbf{b}} - \kappa\hat{\mathbf{t}}.$$

Aufgabe 4 Teilchen auf Spiralbahn, rotierende Basis .... [6P]

Ein Teilchen bewege sich in der x-y-Ebene. Sein Ortsvektor sei als Funktion der Zeit t gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\hat{\mathbf{e}}_r(t)$$

mit dem rotierenden Einheitsvektor

$$\hat{\mathbf{e}}_r(t) = \cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_y$$

und konstantem $\lambda > 0, \omega > 0$.

Teilchenspuren; Quelle: University of Pennsylvania

a) Zeigen Sie, dass mit

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi(t) = -\sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x + \cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_y$$

ein zu $\hat{\mathbf{e}}_r(t)$ stets senkrechter Einheitsvektor gegeben ist und bestimmen Sie die Zeitableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_r(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_\varphi(t)$ in der rotierenden Basis, das heißt, ausgedrückt durch $\hat{\mathbf{e}}_r(t)$ und $\hat{\mathbf{e}}_\varphi(t)$.

b) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ in der rotierenden Basis und geben Sie deren Beträge $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ und $a(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$ an.

c) Nun soll untersucht werden, wie die Beschleunigung zur Bewegungsrichtung steht. Bestimmen Sie dazu das Skalarprodukt $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ und bringen Sie es in Beziehung zur Geschwindigkeit $v(t)$. Wird das Teilchen beschleunigt oder abgebremst?

d) Zerlegen Sie $\mathbf{a}(t)$ in eine Komponente $\mathbf{a}_\parallel(t)$ *in* Bewegungsrichtung (also parallel zu $\mathbf{v}(t)$) und eine dazu *senkrechte* Komponente $\mathbf{a}_\perp(t)$. Drücken Sie diese beiden Komponenten durch $\mathbf{v}(t)$ aus, indem Sie zuerst zeigen, dass gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_z = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi \qquad \text{und} \qquad \hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_r\,.$$

Wie lässt sich die Bewegung damit als die eines geladenen Teilchens im Magnetfeld unter Reibung deuten?

e) Welchen Gesamtweg legt das Teilchen von $t = 0$ bis $t = \infty$ zurück?