Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 6

[Beachte: Aufgaben mit (*) sind jeden Montag vor 10:00 schriftlichen in die entsprechenden Briefkästen einzuwerfen.]

Aufgabe 1 * Determinante .... [6P]

a) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

b) Für welche k verschwindet die Determinante

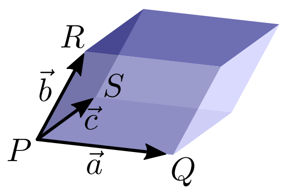
$$D(k) = \begin{vmatrix} 1 & 2-k & 0 \\ k^2-1 & -k^2 & 4-k \\ k & 2k-3 & 0 \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}?$$

c) Zeigen Sie, dass die folgende "Blockdeterminante" faktorisiert:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

Aufgabe 2 * Volumen eines Parallelepipeds .... [3P]

Berechnen Sie mit Methoden der Vorlesung das Volumen des durch drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, (siehe Abbildung) aufgespannten Parallelepipeds, die den Punkt $P = (0, 1, 1)$ mit den Punkten $Q = (1, 1, 3)$, $R = (4/3, 3/2, 1)$ und $S = (5/4, 1, 2)$ verbinden.



Aufgabe 3 * Reziprokes Gitter .... [5P]

In einem Kristall sind Atome in einem regelmäßigen Gitter angeordnet, das durch drei linear unabhängige Gittervektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vollständig beschrieben wird. Das sogenannte *reziproke Gitter* wird von den Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \qquad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}$$

beschrieben.

a) Zeigen Sie für $i, j = 1, 2, 3$ die Beziehung $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$.

b) Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ spannen die sogenannte *Elementarzelle* (Parallelepiped) auf. Ihr Volumen sei V_a. Zeigen Sie, dass die Elementarzelle des reziproken Gitters durch $V_b = V_a^{-1}$ gegeben ist.

Hinweis: Sie dürfen die Identitäten aus Aufgabe 4 ohne Beweis benutzen!

Aufgabe 4 Verallgemeinerte Lagrange-Identität und ε-Tensor .... [10P]

Besonders hilfreich bei der Berechnung von Vektorprodukten ist der ε-Tensor, der auch *Levi-Civita*-Symbol ε_{ijk} genannt wird.

a) Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\,.$$

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a), um die folgenden Beziehungen zu beweisen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}, \quad \text{(ii)} \quad \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6\,.$$

c) Zeigen Sie

$$\text{(i)} \quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \quad \text{(ii)} \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

d) Die sogenannte *Lagrange-Identität* lautet

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass sogar folgende Verallgemeinerung gilt:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,.$$

Aufgabe 5 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren .... [4P]

Zwei beliebige linear unabhängige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ spannen einen zweidimensionalen Untervektorraum[1] U des $\mathbb{R}^n$ auf, $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Finden Sie mit dem Ansatz

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} + a\mathbf{u}$$

einen Vektor $\mathbf{v}_\perp$ so, dass $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}_\perp\}$ eine orthogonale Basis (bzgl. des Standardskalarprodukts) dieses Untervektorraumes ist.

b) Vergleichen Sie das Ergebnis für $n = 3$ mit dem Ergebnis von Aufgabe 4c)(ii) für $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{u}$ und $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ und interpretieren Sie dieses geometrisch.

c) Berechnen Sie eine orthogonale Basis des von den Vektoren $(1, 0, 2, -1)^T$ und $(-2, 1, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ aufgespannten Vektroraums.

---

[1] $U \subseteq V$ bildet genau dann einen Untervektorraum von V, wenn sie nichtleer und abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation ist.