Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
Lars Milz , Benjamin Geiger, Michael Kelly, Thomas Kristlbauer, Quirin Hummel

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 5

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 Taylorentwicklung über Rekursion .... [6P]

Gesucht ist die Taylorentwicklung im Punkt $x_0 = 0$ der Funktion

$$f(x) = \sin(m \arcsin(x)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Um die Reihe aufzustellen, werden wir eine Rekursionsrelation für die Ableitungen finden.

a) Zeigen Sie durch zweimaliges Differenzieren der Funktion $f(x)$, dass folgende Beziehung gilt

$$(1 - x^2)f^{(2)}(x) - xf^{(1)}(x) + m^2 f(x) = 0,$$

wobei wir $f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ für die n-te Ableitung von $f(x)$ schreiben.

b) Differenzieren Sie die Gleichung aus a) n-mal und zeigen Sie

$$f^{(n+2)}(0) = (n^2 - m^2)f^{(n)}(0)$$

Hinweis: Benutzen Sie die Leibniz Formel für n-maliges Differenzieren des Produkts zweier Funktionen

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

c) Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$ bis einschließlich zur 7.Ordnung in x an.

Aufgabe 2 Dreiecksungleichung* .... [4P]

Es sei $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ und $a = \|\boldsymbol{a}\|$, $b = \|\boldsymbol{b}\|$, wobei $\|x\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ die Norm des Vektors $\boldsymbol{x}$ bezeichne. Zeigen Sie die Gültigkeit der Dreiecksungleichung $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq a + b$ und dann

$$|a - b| \leq \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq a + b.$$

Aufgabe 3 Der Vektorraum der Polynome* .... [5P]

In der Vorlesung wurde die Menge aller Polynome

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j$$

vom Grad $\leq N \in \mathbb{N}$ (mit $a_j, x \in \mathbb{R}$) betrachtet. Wir definieren die Skalarmultiplikation eines Polynoms mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Summe zweier Polynome (Vektoraddition) durch

$$\alpha P(x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha a_j x^j \quad , \quad P(x) + Q(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j + \sum_{j=0}^{N} b_j x^j = \sum_{j=0}^{N} (a_j + b_j) x^j \, .$$

a) Zeigen Sie, dass die Polynome mit der so definierten Multiplikation und Addition die Vektorraumaxiome erfüllen und damit einen Vektorraum bilden.

b) Wir wählen als Definitionsbereich $x \in [-1, 1]$ und definieren ein Skalarprodukt

$$P \cdot Q = \int_{-1}^{1} P(x)\ Q(x)\ \mathrm{d}x,$$

d.h. P und Q stehen senkrecht aufeinander, falls $P \cdot Q = 0$.

Betrachten Sie nun den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Bestimmen Sie zu $P_0(x) = 1$ Polynome $P_1(x)$ und $P_2(x)$ vom Grad 1 und 2, so dass P_0, P_1 und P_2 paarweise senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 4 Lineare (Un)Abhängigkeit .... [2P]

a) Gegeben seien drei Vektoren des $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, ob diese Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und stellen Sie den Vektor $\mathbf{u} = (1, 2, 2)^T$ in dieser Basis dar.

Aufgabe 5 Skalar- und Kreuzprodukt .... [5P]

Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ und $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ für

a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$

b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$