Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
Lars Milz, Benjamin Geiger, Thomas Kristlbauer, Kelly Michael, Quirin Hummel

Übungen zur Vorlesung “Mathematische Methoden”
Blatt 4

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 * Taylorentwicklung .... [7P]

Entwickeln Sie folgende Funktionen $f(x)$ bis zur einschließlich dritten Ordnung in eine Taylorreihe um die angegebene Stelle x_0:

a) $(1+2x)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, um $x_0 = 1$,

b) a^x, $a \in (0, \infty)$, um $x_0 = 1$,

c) $\ln(x)$, um $x_0 = 1$,

d) $\sin(x)$, um $x_0 = 0$,

e) $\cos(x)$, um $x_0 = 0$.

f) Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = \sin\left(\ln(1+x)\right).$$

   i) Entwickeln Sie $f(x)$ um $x_0 = 0$ bis einschließlich der dritten Ordnung. Verketten Sie dazu die Lösungen aus c) und d).

   ii) Bestimmen Sie an den Stellen $x = -0.2$ und $x = -0.9$ den Fehler des endlichen Taylorpolynoms, indem Sie die Funktion exakt auswerten und mit dem Näherungswert vergleichen.

Aufgabe 2 Sinus und Kosinus* .... [3P]

Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta), \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta), \\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Arcus-Tangens-Reihe* .... [2P]

Beweisen Sie, dass für $|x| < 1$ gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Hinweis: Benutzen Sie eine Integraldarstellung des $\arctan(x)$ *und benutzen Sie die geometrische Reihe. Es darf angenommen werden, dass die unendliche Summe und das Integral vertauschen.*

Aufgabe 4 Komplexe Zahlen .... [5P]

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen und geben Sie jeweils alle Lösungen an

a) $\sqrt[3]{8i}$,

b) $\sqrt{2\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}$,

c) $\sqrt[3]{2\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)}$,

d) , $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$,

e) $\sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$.

Aufgabe 5 Periodische Dezimalbruchentwicklung .... [5P]

Gegeben ist eine periodische Dezimalzahl $x = 0.\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_N}$, wobei die $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ Dezimalstellen sind. Zeigen Sie, dass x als Bruch von zwei natürlichen Zahlen p, $q \in \mathbb{N}^*$ dargestellt werden kann, $0.\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_N} = p/q$. Stellen sie hierzu die periodische Dezimalzahl x als geometrische Reihe dar.
Hinweis: Betrachte der Einfachheit halber zunächst $0.\overline{1}$ *und zeige* $0.\overline{1} = 1/9$.

Aufgabe 6 Relativistische Korrekturen .... [4P]

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m und Geschwindigkeit v in einer Dimension. Die relativistischen Ausdrücke des Impulses p und der Energie E lauten

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

mit $c \approx 3\times 10^8$ m/s. Wie hängt E vom Impuls p ab? Entwickeln Sie $E(p)$ im nichtrelativistischen Limes $p/mc \ll 1$ bzw. $v/c \ll 1$, bis zur dritten Ordnung in p/mc.