Universität Regensburg WS 2017/18
Dr. P. Wenk
Lars Milz, Benjamin Geiger, Thomas Kristlbauer, Kelly Michael, Quirin Hummel

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 3

[Beachte: Aufg. mit (*) sind schriftlich jeden Mo vor 10:00 in die entsprechenden Briefkästen abzugeben.]

Aufgabe 1 Gaußsches Integral [4P]

Berechnen Sie das Gaußsche Integral, d.h. zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{|n|},$$

dabei sind $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Verwenden Sie dazu die Integrale

$$F(t) = \left(\int_0^t e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)^2, \qquad G(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $F'(t) = -G'(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, und daher $F(t) + G(t) = c\ \forall t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt. Um c zu bestimmen, werten Sie $F(t)$ und $G(t)$ bei $t = 0$ aus.

Aufgabe 2 Delta-Distribution [4P]

Die Diracsche Delta-Distribution $\delta(x - x_0)$ (hier im $\mathbb{R}$) beschreibt eine am Punkt x_0 lokalisierte Abbildung mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0) \tag{1}$$

und Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{2}$$

Die Delta-Distribution kann als Grenzwert einer Funktionenfolge verstanden werden.
(a) Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$\delta_n(x-x_0) = \frac{n\,\pi^{-1}}{n^2 + (x-x_0)^2}$$

und zeigen Sie dass der Grenzwert dieser Folge die Delta-Distribution ergibt, d.h.

$$\lim_{n\to 0} \delta_n(x-x_0) = \delta(x-x_0).$$

(b) Zeigen Sie die Symmetrie der Delta-Distribution mithilfe der Eigenschaft (1).

$$\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x).$$

Aufgabe 3 * Delta-Distribution einer Funktion [3P]

Sei $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit n einfachen Nullstellen x_i, wobei $i = 1, \ldots, n$. Somit ist $f(x)$ bijektiv (d.h. in diesen Umgebungen existiert eine Umkehrfunktion) in den Intervallen $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ mit $0 < \epsilon \ll 1$.
Zeigen Sie, dass

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

gilt, indem Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} g(x) \, \mathrm{d}x$$

zeigen. Hierbei ist $g(x)$ eine Testfunktion.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst in welchen Regionen das Integral einen Beitrag liefert und substituieren Sie anschließend $u = f(x)$.

Aufgabe 4 Leibniz-Regel für Parameterintegrale [4P]

(a) Die Fehlerfunktion oder auch *Gaußsche* Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(x)$ ist gegeben als

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \,,$$

Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{erf}(x)$.

(b) Berechnen Sie mithilfe der Leibniz-Regel für Parameterintegrale den Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \int_1^{\omega} \left[\ln(x\omega^2) + \frac{\sin(3x)}{x} \right] \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5 * Integrale über $\sin(x)$ und $\cos(x)$ [4P]

Das Integral $J(m, n)$ sei für nichtnegative, ganze Zahlen m und n wie folgt definiert:

$$J(m, n) = \int_0^{\pi/2} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta) \, \mathrm{d}\theta \,.$$

Zeigen Sie über partielle Integration, dass für $m, n > 1$ folgende Rekursionen gelten:

$$J(m, n) = \frac{m-1}{m+n} J(m-2, n) \quad \text{und} \quad J(m, n) = \frac{n-1}{m+n} J(m, n-2) \,.$$