Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 2

[Beachte: Aufg. mit (*) sind schriftlich jeden Mo vor 10:00 in die entsprechenden Briefkästen abzugeben.]

Aufgabe 1 * Tangens Hyperbolicus [2P]

Der *Tangens Hyperbolicus* auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch $\tanh(x) := (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion des Tangens Hyperbolicus. Finden Sie dabei die richtige Einschränkung der Definitions- und Zielmenge, so dass die Funktion bijektiv ist. Bestimmen Sie außerdem die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe 2 * Ableitungsregeln [4P]

(a) Leiten Sie die Quotientenregel

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

aus der Produkt- und Kettenregel her. Geben Sie dabei explizit an, wo die entsprechenden Regeln benutzt wurden!

(b) Berechnen Sie die folgenden Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sqrt{x^2+a^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(\sin^2(3x)\right)\right]^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^x$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $n = 1, 2$. *Hinweis*: $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Aufgabe 3 * Integrale [4P]

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x, \qquad \int e^{ax}\cos(2x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \sin(x)e^{\cos(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{e^{a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 *Partialbruchzerlegung [6P]

Gegeben sei eine rationale Funktion der Form

$$R_{NM} = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)},$$

mit den Polynomen $P_N(x), Q_M(x)$ vom Grad $M > N$. Es ist

$$Q_M(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m},$$

wobei $x_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$ und die folgende Gleichung für die Vielfachheiten $k_i, l_i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i + 2\sum_{i=1}^{m} l_i = M.$$

Für die Partialbruchzerlegung $Z(x)$, bei der $R_{NM}(x)$ in eine Summe von Brüchen zerlegt werden soll, wählt man für jeden Faktor $(x - x_i)^{k_i}$ als Ansatz k_i Terme:

$$\frac{a_{i1}}{(x - x_i)} + \frac{a_{i2}}{(x - x_i)^2} + \cdots + \frac{a_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Die entsprechenden l_i Terme als Ansatz für jeden Faktor $(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$ lauten

$$\frac{b_{i1}x + c_{i1}}{(x^2 + p_i x + q_i)} + \frac{b_{i2}x + c_{i2}}{(x^2 + p_i x + q_i)^2} + \cdots + \frac{b_{il_i}x + c_{il_i}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}}, \quad b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Für die Partialbruchzerlegung $Z(x)$ von $R_{NM}(x)$ soll gelten

$$R_{NM}(x) = Z(x).$$

(a) Wie bestimmt man die unbekannten Parameter $\{a_{i1}, \ldots, b_{i1}, \ldots, c_{i1}, \ldots\}$ der Zerlegung?

(b) Im Fall $M \leq N$ spricht man von unecht gebrochenrationalen Funktionen. Wie kann man diese auf den Fall $M > N$ zurückführen?

(c) Benutzen Sie jetzt die Partialbruchzerlegung, um die unbestimmten Integrale

$$\text{i)} \int \frac{x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{ii)} \int \frac{x^2 + 1}{(x^3 - 1)(x + 2)}\,\mathrm{d}x,$$

zu berechnen.

Aufgabe 5 *Die Eulersche Gammafunktion [4P]

Die Eulersche Gammafuntktion ist für $x > 0$ definiert durch das Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie durch partielle Integration die folgende Eigenschaft der Gammafuntion:

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x).$$

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis um für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\Gamma(n + 1) = n!$ zu beweisen.

(c) Welcher Wert ergibt sich für $\Gamma(1/2)$? *Hinweis*: Gaußsches Integral.