Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Dr. Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungs-Klausur zur Vorlesung „Mathematische Methoden“

29.01.18

Aufgabe 1 Komplexe Zahlen .... [10P]

(a)(3P) Beweisen Sie $\sum_{n=1}^{N} e^{i\frac{2\pi}{N}n} = 0$ mit $N \in \mathbb{N}^*$. *Hinweis: Geometrische Reihe!*

(b)(2P) Geben Sie die Schnittmenge von A und B an mit $A = \{z \in \mathbb{C} \| z-1| = 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} | \arg(z) = \pi/4\}$.

(c)(2P) Beweisen Sie $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^3 = \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.

(d)(3P) Geben Sie die Lösunsmenge in $\mathbb{C}$ an für $z^2 = 2i$, mit $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 Dirac-δ-Distribution .... [9P]

Bestimmen Sie

(a)(3P) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{x^2} \delta(\mathrm{e}^x)$.

(b)(3P) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x\ (x+1)^2 \delta(\sin(\pi x))$.

(c)(3P) $\int_{-\infty}^{3} \mathrm{d}y\ y\delta(y-\pi)$.

Aufgabe 3 ArcTan .... [6P]

Leiten Sie die Ableitung der arctan Funktion her.

Aufgabe 4 Taylorentwicklung .... [10P]

1) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung bis (einschließlich)

(c)(3P) 3. Ordnung: $f(x) = \sin^2(x)$ um $x = 0$.

(b)(3P) 2. Ordnung: $f(x) = e^{\sin(ax)}$ um $x = 0$ für $a > 0$.

2) (4P) Die potentielle Energie eines Partikels der Masse m mit Abstand r vom Zentrum eines Planeten mit Radius R und Masse M ist gegeben durch $\phi(r) = GMm/R - GMm/r$. Zeigen Sie, dass in einer Entfernung $h \ll R$ von der Oberfläche des Planeten die potentielle Energie der Masse m mit mgh genähert werden kann und bestimmen sie dabei g.

Aufgabe 5 Integration .... **[9P]**

Bestimmen Sie folgende Integrale mit $x \in \mathbb{R}$

(a)(1P) $\int \mathrm{d}x\, y$, $y \in \mathbb{R}$,

(b)(1P) $\int \mathrm{d}x\, 0$,

(c)(3P) $\int_0^a \mathrm{d}x\, x \sin\left(x^2\right)$, mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

(d)(4P)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\, \frac{(\sin^2(x)+1)\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\sin(x)+\frac{1}{2}} .$$

Aufgabe 6 Ellipsoid .... **[10P]**

Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_\Omega \mathrm{dxdydz} \left(\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2}+\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

über das Innere des Ellipsoiden $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$. Benutzen Sie dazu die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\sin(\theta)\cos(\phi) \\ br\sin(\theta)\sin(\phi) \\ cr\cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 7 Vektorraum .... **[4P]**

Ist der Raum der Rotationsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (mit der Matrixaddition und Multiplikation mit einem Skalar)?

Aufgabe 8 Vektorfelder .... **[14P]**

Gegeben sind die Vektorfelder $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x+y+z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} y^2 - x \\ x - \sqrt{y} \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

(a)(4P) Welche der Felder $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ist Gradientenfeld. Falls ja, bestimmen Sie das zugehörige Potential.

(b)(5P) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma_1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, längs der Kurve

$$\gamma_1 = \{\mathbf{r}(\phi) = R\cos(\phi)\hat{e}_x + R\sin(\phi)\hat{e}_y + \frac{h}{2\pi}\,\phi\,\hat{e}_z \,|\, 0 \leq \phi \leq 4\pi\}.$$

(c)(5P) Berechnen Sie den Fluss $\Phi = \int_A \mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$ durch eine Kreisscheibe in der xy-Ebene mit Mittelpunkt in $x = y = 0$ und $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und mit Radius R. Hierbei soll das Flächenelement in die Richtung $\hat{e}_z$ zeigen.

Aufgabe 9 Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung . . . . [12P]

Mit $\mathbb{R}[x]_k$ bezeichen wir den Vektorraum der reellwertigen Polynome vom Grad k. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ mit

$$ax^2 + bx + c \mapsto f(ax^2 + bx + c) = \int_0^x (at^2 + bt + c)dt \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Jedem Polynom vom Grad $k = 2$ wird durch diese Abbildung ein Polynom vom Grad $k = 3$ zugeordnet.

(a)(3P) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b)(9P) Geben Sie die Darstellungsmatrix D von f bezüglich der Basis $B_1 = \{1, x, x^2\}$ im Definitionsraum und der Basis $B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ im Bildraum an.

Aufgabe 10 Kern . . . . [4P]

Gegeben sei die lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen den Vektorräumen V, mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$ und W in der Darstellung,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension besitzt der Raum $\{\mathbf{u} \in V | A.\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$?

Hinweise:

- Bitte notieren Sie Ihren Namen auf jedem Blatt, das Sie abgeben.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Notieren Sie die Aufgaben-Nummer.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Zulässige Hilfsmittel: Ein handschriftlich beschriebenes DIN-A4-Blatt (doppelseitig). Kein Taschenrechner/Handy/o.ä.!

Viel Erfolg!