Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 12

[Beachte: Aufgaben mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechende Briefkästen.]

Aufgabe 1 Sätze von Stokes & Gauß* .... [8P]

Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A} = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$.

a) Ist dieses Vektorfeld ein Gradientenfeld? Hat das Vektorfeld Quellen oder Senken?

b) Betrachten Sie nun die Fläche, die durch den Halbkreis mit Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ in der Ebene $z = 0$ mit $y \geq 0$ definiert ist. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Stokes bei der Integration des obigen Vektorfeldes entlang der (orientierten) Kontur dieser Fläche.

c) Verifizieren Sie die Gültigkeit des Satzes von Gauß für eine Integration des Vektorfeldes über die Oberfläche eines (geschlossenen) Zylinders (Radius R, Höhe h), der koaxial zur z-Achse mit einer Ausdehnung $0 \leq z \leq h$ ausgerichtet ist.

d) Berechnen Sie den Fluss des Feldes durch eine Kugelschale mit Radius $R = 5$, die um den Ursprung zentriert ist.

Aufgabe 2 Greensche Identität* .... [3P]

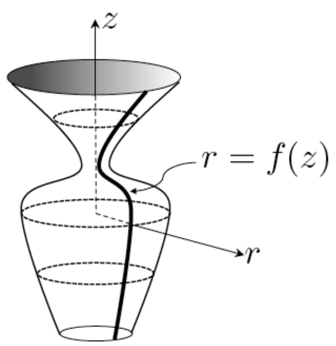
Gegeben seien zwei skalare, mindestens zweimal differenzierbare Felder Φ und Ψ. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die folgende Identitiät:

$$\oint_S (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi) \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_V (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi)\,\mathrm{d}V\,,$$

wobei V der Raumbereich ist, der von der Fläche $S = \partial V$ begrenzt wird.

Aufgabe 3 Parabolischer Kelch .... [8P]

Sei $f(z) : [a, b] \to [0, \infty[$ eine stetige und differenzierbare Funktion. Der Graph von f rotiere um die z-Achse (siehe Abbildung).



Die Rotation des Graphen $f(z)$ um die z-Achse definiert eine Fläche. Diese Mantelfläche schließt mit den Deckflächen in der xy-Ebene bei $z = a$ und $z = b$ das Volumen des Rotationskörper ein.

Verwenden Sie im Folgenden den konkreten Spezialfall $f(z) = z^2$ mit $z \in [0, b]$.

a) Skizzieren Sie den Rotationskörper in der xy-Ebene für $z = b$, sowie in der xz-Ebene für $y = 0$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z$ in Zylinderkoordinaten. Berechnen Sie das Integral $\int_V (\operatorname{div} \mathbf{F})\, \mathrm{d}V$ über das Volumen des Rotationskörpers.

c) Berechnen Sie den Fluss $\Phi_D = \int_D \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ durch die Deckfläche

$$D = \{\mathbf{r}(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in [0,\, b^2], \phi \in [0,\, 2\pi], z = b\}.$$

des Rotationskörpers.

d) Nutzen Sie den Gaußschen Satz, um den Fluss durch die Mantelfläche des Rotationskörpers zu bestimmen (siehe Abbildung).

Aufgabe 4 Integraldarstellung der Divergenz .... [4P]

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kann geschrieben werden als

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\substack{V \to 0 \\ \mathbf{r}_0 \in V}} \frac{1}{V} \oint_{\partial(V)} \mathrm{d}\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})\,.$$

Gezeigt werden soll die Gültigkeit am Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ für den Fall eines *radialsymmetrischen* Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r)\hat{\mathbf{e}}_r$.

a) Welchen Wert muss $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ haben?

b) Bestimmen Sie die linke Seite der Gleichung in Kugelkoordinaten.

c) Wählen Sie V als eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und berechnen Sie die rechte Seite.

d) Zeigen Sie für diese Wahl die Gleichheit. Hinweis: Satz von L'Hospital.