Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 11

[Beachte: Aufgaben mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechende Briefkästen.]

Aufgabe 1 Kettenregel für Jacobi-Determinante* .... [4P]

Gegeben sei eine Folge von Variablentransformationen $(x, y) \mapsto (w, z) \mapsto (u, v)$.

a) Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

der zusammengesetzten Transformation $(x, y) \mapsto (u, v)$ die folgende Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(w,z)} \frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}.$$

b) Betrachten Sie als Koordinatentransformationen im $\mathbb{R}^2$ die Drehung um einen Winkel φ und eine Streckung/Stauchung, gegeben durch die Abbildungen

$$R_\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad S_{a,b} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

Gegeben sei nun eine Transformation M, zusammengesetzt aus Drehung, Streckung/Stauchung und Rückdrehung, also

$$M = R_{-\varphi} \circ S_{a,b} \circ R_\varphi \quad (\circ : \text{Verknüpfung der Abbildungen}).$$

Wodurch sind die Jacobi-Determinanten der Einzeltransformationen gegeben? Bestimmen Sie unter Verwendung von *a)* die Jacobi-Determinante von M.

Aufgabe 2 Volumenintegrale in Kugelkoordinaten* .... [4P]

In dieser Aufgabe soll eine Halbkugelschale der Masse M mit Innenradius R_i und Außenradius R_a, sowie konstanter Dichte betrachtet werden.

a) Bestimmen Sie das Volumenelement dV in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) aus der Jacobideterminante der Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (r, \vartheta, \varphi)$.

b) Bestimmen Sie die Dichte $\rho_0 = M/V$ der Halbkugelschale ausgedrückt durch R_i, R_a und M.

c) Berechnen Sie die Position des Schwerpunkts $\mathbf{R} = M^{-1} \int_V \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}\, dV$ der Halbkugelschale in Abhängigkeit von R_i, R_a und M. Was ergibt sich für die Fälle $R_i \to 0$ bzw. $R_i \to R_a$?

d) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment

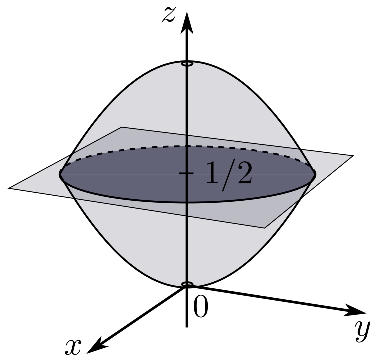
$$I = \int_V (\mathbf{r}_\perp)^2 \rho(\mathbf{r})\, dV$$

für die Rotation um die Symmetrieachse, wobei $\mathbf{r}_\perp$ die Komponente von $\mathbf{r}$ senkrecht zu dieser Achse ist. Bestimmen Sie ebenfalls die Grenzfälle $R_i \to 0$ bzw. $R_i \to R_a$.

Aufgabe 3 Fluss durch Doppelparaboloid .... **[4P]**

Betrachtet wird die geschlossene Fläche, die entsteht, wenn zwei identische abgeschnittene Rotationsparaboloide umgekehrt aufeinander gelegt werden (siehe Abbildung).
Der untere Teil sei beschrieben durch

$$z = x^2 + y^2, \quad z \le 1/2.$$



Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -x \\ y^2 \\ -z \end{pmatrix}$$

den gesamten Fluss durch die geschlossene Fläche. Wählen Sie dabei die Orientierung des Normalenvektors so, dass er aus dem Volumen hinaus zeigt.

Aufgabe 4 Linienintegrale .... **[4P]**

Gegeben sei das Vektorfeld

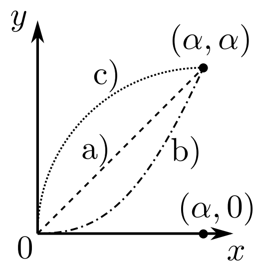
$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A}(x, y) = k \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$$

mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ in der xy-Ebene vom Ursprung bis zum Punkt $(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ entlang der folgenden Wege (vgl. Abbildung):

a) eine gerade Linie zwischen den beiden Punkten,

b) eine Parabel mit Scheitel im Ursprung, die durch (α, α) verläuft,

c) ein Viertelkreis mit Mittelpunkt $(\alpha, 0)$ durch die beiden Punkte.



Ist das Vektorfeld konservativ?