Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, T. Kristlbauer, M. Kelly, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 10

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 Kraftfeld und Schraubenlinie* ....(5 Punkte)

Gegeben sei das Kraftfeld $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,y,z)=(3y,-3x+y,2z)$. In diesem Kraftfeld und ausgehend vom Punkt $(R,0,0)$ führe nun ein Massenpunkt zwei volle Umdrehungen im Gegenuhrzeigersinn entlang einer Schraubenlinie aus (Radius R, Ganghöhe h (=Abstand übereinander liegender Punkte); Rotationsachse sei die z-Achse), um schließlich zum Punkt $(R,0,2h)$ zu gelangen. Berechnen Sie die am Massenpunkt m durch das Kraftfeld $\mathbf{F}$ verrichtete Arbeit.

Aufgabe 2 Doppelintegrale* ....[5P]

Skizziere Sie die entsprechende Menge $\mathcal{M}$ und berechnen Sie dann die folgenden Doppelintegrale über der Menge mit entsprechenden Integrationsgrenzen:

a) $\mathcal{M}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\, x\le y\le\sqrt{x}\}$ und $\int_{\mathcal{M}} xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

b) $\mathcal{M}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1\le y,\, y+x^2\le 3\}$ und $\int_{\mathcal{M}} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

c) $\mathcal{M}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le x^2,\, 0\le x\le 2\}$ und $\int_{\mathcal{M}} \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

d) $\mathcal{M}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+4y^2,\, x^2+y^2\le 1\}$ und $\int_{\mathcal{M}} (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

e) $\mathcal{M}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+4y^2,\, x^2+y^2\le 1\}$ und $\int_{\mathcal{M}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Aufgabe 3 Gesamtmasse und Schwerpunkt* ....[5P]

Der Luftdruck auf der Erde nimmt mit zunehmender Höhe z ab, wodurch auch die Dichte der Luft abnimmt. In guter Näherung folgt diese höhenabhänige Dichte ρ der Funktion:

$$\rho(z)=\rho_0 e^{-\frac{z}{z_0}},$$

wobei ρ_0 der Druck an der Erdoberfläche ist.

a) Berechnen Sie die Gesamtmasse einer zylinderförmigen Luftsäule mit Radius R und Höhe h, sowie die Komponenten des Schwerpunktes $\mathbf{S}$ dieses Zylinders. Legen Sie hierfür den Koordinatenursprung in das Zentrum der Grundfläche und berechnen sie explizit alle Komponenten von $\mathbf{S}$.

b) Davon ausgehend, dass wir diese Luftsäule als einen starren Körper betrachten, berechnen Sie deren Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse, Θ_{zz}. Allgemein ist die Beziehung zwischen den Drehimpulskomponenten L_i und der Winkelgeschwindikeit $\boldsymbol{\omega}$ gegeben durch

$$L_i=\sum_{j=\{x,y,z\}}\Theta_{ij}\omega_j,\quad \Theta_{ij}=\int_V\rho(\mathbf{r})(r^2\delta_{ij}-x_ix_j)\,\mathrm{d}V,\quad \{x\equiv x_1,y\equiv x_2,z\equiv x_3\}$$

Θ_{ij} ist der Trägheitstensor. Er gibt die Trägheitsmomente eines Körpers bezüglich einer Drehung an.

Aufgabe 4 Earnshaw-Theorem oder *können klassische Kristalle existieren?* . . . (6 Punkte)

Das Earnshaw-Theorem besagt, dass es kein statisches Magnet- oder elektrisches Feld gibt, das Objekte in einem stabilen Gleichgewicht halten kann. Ausnahmen sind Objekte die eine Rotation durchführen. Gegeben sei ein *konservatives* Vektorfeld $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Die Divergenz des Vektorfeldes verschwinde für alle $\mathbf{r}$ in einem Gebiet G, d.h. $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$. In diesen Gebiet G ist das Potential $\Phi(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$, wohl definiert.

a) Gibt es stabile Gleichgewichtslagen von Φ im Gebiet G? Hierfür argumentieren Sie warum die stabile Gleichgewichtspunkte gerade die Punkte sind, an denen das Potential Φ ein Minimum hat und nicht ein Maximum oder einen Sattelpunkt besitzt. Nehmen Sei nun an, dass $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein Gleichgewichtspunkt sei und führen Sie die jeweiligen Taylorentwicklungen für kleine Auslenkungen in Richtung $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ und $\hat{\mathbf{e}}_z$ bis zur 2. Ordnung durch. Beweisen Sie, dass die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$ ihre Gültigkeit behält und argumentieren Sie damit und dem Ergebnis aus der Taylorentwicklung das keine stabile Gleichgewichtspunkte existieren können!

b) Das durch ruhende Ladungen (z.B. Ionen) hervorgerufene elektrische Feld $\mathbf{E}$ ist ein Beispiel für ein konservatives Vektorfeld, und in räumlichen Gebieten, in denen sich keine Ladungen befinden, erfüllt es $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Zeigen Sie diese Aussagen exemplarisch für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

von N punktförmigen Ladungen q_i, die sich an den Punkten $\mathbf{r}_i$ befinden.

c) Wird ein Ion der Ladung q in ein elektrisches Feld $\mathbf{E}$ gebracht, so wirkt auf dieses die Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Ist ein elektrisches Feld mit Eigenschaften wie in Teilaufgabe b) in der Lage, das Ion „gefangen“ zu halten? („Gefangen“ bedeutet: das Feld treibt das Ion bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage wieder dahin zurück.) Erläutern Sie kurz, welche weiteren Konsequenzen sich aus der Antwort dieser Frage für die Stabilität eines Kristalls ergeben.

Aufgabe 5 Integration über einen Tetraeder . . . . [3P]

Die Punkte $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, -1, 2)$, $C = (1, 0, 2)$, $D = (1, -1, 3)$ bilden einen Tetraeder $\mathcal{T}$. Skizzieren Sie diesen und integrieren Sie die Funktion $f(x, y, z) = z$ über $\mathcal{T}$, d.h. berechnen Sie das Integral

$$I = \iiint_{\mathcal{T}} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$