Universität Regensburg WS 2017/2018
Dr. P. Wenk
B. Geiger, Q. Hummel, M. Kelly, T. Kristlbauer, L. Milz

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 1

[Beachte: Aufgaben mit (*) sind jeden Mo vor 10:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechende Briefkästen.]

Aufgabe 1 Trigonometrische Funktionen, Arkus- und Hyperbelfunktionen . . . [2P]

Skizzieren Sie die folgenden trigonometrischen Funktionen:

$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x), \quad \cot(x),$

so wie die Umkehrfunktionen

$\operatorname{arccot}(x), \quad x \in (-\infty, +\infty); \qquad \arcsin(x), \quad x \in [-1, 1],$

die Hyperbelfunktionen

$\sinh(x), \quad \cosh(x), \quad \tanh(x),$

und die Umkehrfunktion

$\operatorname{arcsinh}(x).$

Aufgabe 2 Ableitungen . . . [4P]

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3 Integrale . . . [4P]

Berechnen Sie die folgenden bestimmten/unbestimmten Integrale durch Substitution oder partielle Integration:

$$\int x \sin(ax)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \tanh(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{c+x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^2}{a+x^3}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad |x_0| \le 1,$$

$$\int_0^a x \ln(x^2)\,\mathrm{d}x,$$

mit $a, b, c \in (0, +\infty)$.

Hinweise: Benutzen Sie im vorletzten Integral die Subtitution $x = \sin(u)$.
Um das letzte Integral bei 0 auszuwerten, benutzen Sie die Regel von de l'Hôpital:
Für $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, und $g'(x_0) \neq 0$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siehe z.B. Bronstein, Kap. 3.1.4.

Aufgabe 4 * Komplexe Zahlen I .... **[5P]**

Berechne

$$\left|\frac{\sqrt{5}+3i}{1-i}\right|, \quad (1+i)^4, \quad \sin(i), \quad i^i. \tag{1}$$

Aufgabe 5 * Komplexe Zahlen II .... **[11P]**

(a)(3P) Stelle die Punktmenge $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 0\}$ graphisch dar.

(b)(4P) Gegeben sei $z^{-2} = 1 + i$. Geben Sie alle Lösungen für $z \in \mathbb{C}$ an und ermitteln Sie jeweils $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\arg(z)$ und $|z|$.

(c)(4P) Zeige, dass

$$\cos^4(\phi) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\phi) + \frac{1}{8}\cos(4\phi) \tag{2}$$

mit Hilfe der Eulerschen Formel.