Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Probeklausur

[Beachte: Abgabe bis zum 13.07.20 unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Komplexe Zahlen .... [8P]

(a) Bestimmen Sie *Betrag* und *Argument* folgender Ausdrücke:

(i) $\left(\frac{3+3i}{\sqrt{2}}\right)^3$, [2P]

(ii) Lösungen der Gleichung $-1 = z^8$. [2P]

(b) Beweisen Sie unter Verwendung der *Eulerschen Formel* folgende Beziehung: [4P]

$$\sin^2(x/2) = (1 - \cos(x))/2\ . \tag{1}$$

Aufgabe 2 Integration .... [12P]

Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei $x, a \in \mathbb{R}$:

(a) $\int x \sin(ax)\ \mathrm{d}x$, [3P]

(b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$, [4P]

(c) $\int_a^b \big(x^2 + 3x - 2\ \delta(x-1)\big)\ \mathrm{d}x$, mit $|a|, |b| < \infty$. [5P]

Aufgabe 3 Taylorreihe .... [8P]

(a) Leiten Sie die Taylorreihe von $\cos(ax)$, mit $x, a \in \mathbb{R}$, bis zur *zweiten Ordnung* um die Stelle $x = b$ her. [3P]

(b) Die Integraldarstellung der Besselfunktionen $J_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[x\sin(\varphi) - \nu\varphi]\mathrm{d}\varphi. \tag{2}$$

Berechnen Sie die erste nicht triviale Näherung[1] für J_0 für kleine Argumente x.
$\int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ [5P]

Aufgabe 4 Divergenz und Rotation .... [13P]

(a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke

(i) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} x^2 y \\ z \\ y \end{pmatrix}$ mit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. [3P]

---

[1] einfachste Näherung, die von x abhängt.

(ii) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$ mit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$, [4P]

(b) Ist das Vektorfeld aus Teilaufgabe (ii) quellenfrei? [2P]

(c) Für welche Werte a, b ist das Vektorfeld

$$\mathbf{V} = (xz - y^3)\mathbf{e}_x + axy^2\mathbf{e}_y + bx^2\mathbf{e}_z \quad \text{im} \quad \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

konservativ? [4P]

Aufgabe 5 Stokes* .... [12P]

Berechnen Sie, unter Ausnutzung des Satzes von Stokes, das Oberflächenintegral $\int_A (\nabla \times \mathbf{V}(x, y, z)) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$, wobei

$$\mathbf{V} = \lambda x^7 y\mathbf{e}_x - x^2 z\mathbf{e}_y + z^3(xy)^5\mathbf{e}_z \tag{4}$$

$$\text{mit} \quad A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ Rz = x^2 + y^2;\ 0 \leq z \leq R,\ R > 0\} \tag{5}$$

über den nach oben geöffnete Paraboloid. Der Flächennormalenvektor am Nullpunkt zeige in die negative z-Richtung.

Aufgabe 6 Fluß .... [8P]

Bestimmen Sie den Fluß ϕ

$$\text{des Vektorfeldes} \quad \mathbf{E} = xz\mathbf{e}_x + yz\mathbf{e}_y + z^2\mathbf{e}_z \tag{6}$$

$$\text{durch die Fläche} \quad \mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0\}\ . \tag{7}$$

Aufgabe 7 Die Jacobi Matrix und der metrische Tensor* .... [11P]

Im Allgemeinen kann einer Transformation von kartesischen Koordinaten (x, y, z) zu neuen Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ eine Jacobi Matrix J zu geordnet werden (die Determinante dieser Matrix wird Jacobi-Determinante genannt).

(a) Berechnen Sie die *Jacobi Matrix* J für die Transformation zu Kugelkoordinaten. [3P]

(b) Der metrische Tensor g ist durch die $g = J^T J$ mit der Jacobi Matrix J verknüpft. Berechnen Sie damit g. [3P]

(c) Berechnen Sie mit Hilfe des metrischen Tensors das Linienelement ds. [5P]

☞ *Zwischenergebnis*: Falls nicht mit dem Ergebnis aus (b) weiter gerechnet werden kann, benutzen Sie folgenden metrischen Tensor: $g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8 Determinante und Spur .... [8P]

Zeigen Sie, dass für Matrizen $M \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ gilt[2]

$$2\det(M) = \mathrm{Tr}(M)^2 - \mathrm{Tr}\big(M^2\big)\ . \tag{8}$$

[2] Mit $\mathbb{K}$ ist immer ein beliebiger Körper gemeint.