Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 9

[Beachte: Abgabe bis Mo, 22.6, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Fragen zur Vorlesung .... [3P]

(a) Gebe ein Beispiel für eine nicht-orientierbare Fläche.

(b) Wie ist der Zusammenhang zw. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ und der Jacobi-Determinante?

(c) Was bedeutet *(lokale) Darstellung von* $\mathcal{F}$?

Aufgabe 2 Kettenregel für Jacobi-Determinante* .... [4P]

Gegeben sei eine Folge von Variablentransformationen im $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (w, z) \mapsto (u, v)$. Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Determinante

$$\det\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right] \equiv \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{1}$$

der zusammengesetzten Transformation $(x, y) \mapsto (u, v)$ die folgende Kettenregel gilt:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(w,z)}\right|\left|\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}\right|.$$

Aufgabe 3 Torus .... [10P]

Ein Volltorus kann für festes $R > 0$ in kartesischer Basis durch

$$\begin{pmatrix} x(a,p,q) \\ y(a,p,q) \\ z(a,p,q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [R + a\cos(p)]\cos(q) \\ [R + a\cos(p)]\sin(q) \\ a\sin(p) \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden, wobei $p, q \in [0, 2\pi)$, $a \in (0, a_0)$ und $a_0 < R$ gelten.
Berechnen Sie:

(a) die Jacobi-Determinante $|\partial(x, y, z)/\partial(a, p, q)|$,

(b) und das Volumen dieses Volltorus.

Aufgabe 4 Integraldarstellung der Divergenz .... [1+2+3+3P]

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kann geschrieben werden als

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\substack{V\to 0\\ \mathbf{r}_0\in V}} \frac{1}{V}\oint_{\partial(V)} \mathrm{d}\mathbf{F}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\,.$$

Gezeigt werden soll die Gültigkeit am Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ für den Fall eines *radialsymmetrischen* Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r)\hat{\mathbf{e}}_r$.

(a) Welchen Wert muss $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ haben?

(b) Bestimmen Sie die linke Seite der Gleichung in Kugelkoordinaten.

(c) Wählen Sie V als eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und berechnen Sie die rechte Seite.

(d) Zeigen Sie für diese Wahl die Gleichheit.

☞ Satz von L'Hospital.

Aufgabe 5 Fluss durch Doppelparaboloid* .... [8P]

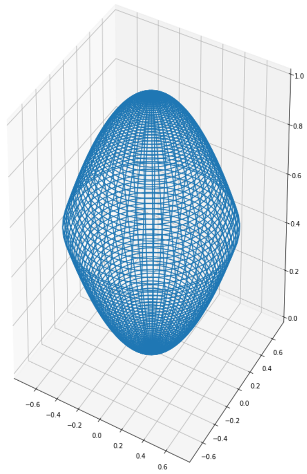
Betrachtet wird die geschlossene Fläche, die entsteht, wenn zwei identische abgeschnittene Rotationsparaboloide umgekehrt aufeinander gelegt werden (siehe Abbildung). Der untere Teil sei beschrieben durch

$$z = x^2 + y^2, \quad z \leq 1/2. \tag{2}$$

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y^2 \\ -z \end{pmatrix} \tag{3}$$

den gesamten Fluss durch die geschlossene Fläche. Wählen Sie dabei die Orientierung der Flächennormalenvektoren so, dass sie aus dem Volumen hinaus zeigen.



Doppelparaboloid