Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 8

[Beachte: Abgabe bis Mo, 15.6, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Fragen zur Vorlesung .... [3P]

(a) Warum haben wir bei der Berechnung der mehrdimensionalen Integrale *Stetigkeit* für die Funktionen, über die wir integrieren, gefordert?

(b) In welchem Zusammenhang haben wir uns Integrale der Form $\int_V l^2 \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V$ angeschaut?

(c) Warum haben wir den Betrag der Jacobi-Determinante betrachtet?

Aufgabe 2 Doppelintegrale .... [10P]

Skizziere Sie die entsprechende Menge $\mathcal{M}$ und berechnen Sie dann die folgenden Doppelintegrale über der Menge mit entsprechenden Integrationsgrenzen:

(a) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ und $\int_{\mathcal{M}} xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(b) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y,\, y + x^2 \leq 3\}$ und $\int_{\mathcal{M}} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(c) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2,\, 0 \leq x \leq 2\}$ und $\int_{\mathcal{M}} \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(d) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $\int_{\mathcal{M}} (|x| + |y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(e) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $\int_{\mathcal{M}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Aufgabe 3 Parabolische Koordinaten .... [1+3+4P]

Die parabolischen Koordinaten $u, v \in \mathbb{R}^+$ sind gegeben durch die Transformationsgleichungen

$$x = uv, \quad y = (v^2 - u^2)/2.$$

(a) Skizzieren Sie in der x, y-Ebene die Kurven mit konstantem u bzw. v.

(b) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$, und zeigen Sie, dass sie orthogonal sind.

(c) Integrieren Sie in Parabolischen Koordinaten die Funktion $f(u, v) = 1$ über die Fläche $\mathcal{F} = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

Aufgabe 4 Massenzentrum .... [4P]

In der Vorlesung haben wir das Massenzentrum $\mathbf{R}$ einer homogenen Halbkugel berechnet. Dabei setzten wir aufgrund der Symmetrie des Problems $R_x = R_y = 0$. Zeigen Sie dies nun durch explizites Berechnen von R_x und R_y.

Aufgabe 5 * Ladungsdichte .... **[8P]**

Die Ladungsdichte $\rho\,(\mathbf{r})$ beschreibt die Verteilung von Ladung pro Volumen. Die Größe $Q = \int\limits_{\mathrm{V}} \rho\,(\mathbf{r}\,')\,\mathrm{d}V'$, ist die im Volumen V' eingeschlossene Ladung.

(a) Betrachten Sie konkret

$$\rho_1(\mathbf{r}) = q\,\left[(xyz+1)^2 \,+\, x^4\,y^2 \,+\, z^2\right]\,\theta(3-|x|)\,\theta(4-|y|)\,\theta(5-|z|), \tag{1}$$

wobei θ die Heaviside Funktion und $q \neq 0$ die Elementarladung darstellt. Wo fällt die Ladungsdichte auf Null ab, d.h. welche Geometrie liegt $\rho_1(\mathbf{r})$ insgesamt zugrunde? Welche Ladung ist in diesem Volumen eingeschlossen?

(b) Betrachten Sie jetzt

$$\rho_2(\mathbf{r}) \;=\; q\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,y^2\,\sinh(z)\;\theta(3-|x|)\,\theta(4-|y|)\,\theta(5-|z|)\;. \tag{2}$$

Welche Ladung ist jetzt enthalten?

Aufgabe 6 * Integration über einen Tetraeder .... **[8P]**

Die Punkte $A = (1,-1,2)$, $B = (2,-1,2)$, $C = (1,0,2)$, $D = (1,-1,3)$ bilden einen Tetraeder $\mathcal{T}$. Skizzieren Sie diesen und integrieren Sie die Funktion $f(x,y,z) = z$ über $\mathcal{T}$, d.h. berechnen Sie das Integral

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{T}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$