Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 7

[Beachte: Abgabe bis Mo, 8.6, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Fragen zur Vorlesung .... [4P]

(a) Was ist eine Kurve?

(b) Darf eine Kurve C Knicke haben?

(c) Wir haben zwei Wegintegrale mit gleichen Anfangs- und Endpunkten jedoch unterschiedlichen Kurven im Raum. Beide Wegintegrale liefern das gleiche Ergebnis. Ist das zugehörige VF konservativ?

(d) Wir haben im Fall des Magnetfeldes im $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{B} \propto (x^2+y^2)^{-1}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)$ gesehen, dass lokal $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Warum ist das Magnetfeld trotzdem nicht konservativ?

Aufgabe 2 Linienintegrale .... [1+2+2+1P]

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A}(x,y) = k \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$$

mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ in der xy-Ebene vom Ursprung bis zum Punkt $(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ entlang der folgenden Wege:

(a) eine gerade Linie zwischen den beiden Punkten,

(b) eine Parabel mit Scheitel im Ursprung, die durch (α, α) verläuft,

(c) ein Viertelkreis mit Mittelpunkt $(\alpha, 0)$ durch die beiden Punkte.

Ist das Vektorfeld konservativ?

Aufgabe 3 Laplace-Operator* .... [6P]

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} U) \equiv \Delta U$ für das skalare Feld $U : \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}.$$

(b) Der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi : \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $\phi(r) = \ln(r)$ im Zweidimensionalen eine harmonische Funktion ist, d.h eine spezielle Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta \phi = 0$ darstellt. Dabei ist $r = |\boldsymbol{r}|$ der Betrag des Ortsvektors im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 Ebene Bahnkurve .... [1+3P]

In ebenen Polarkoordinaten r, φ sei die Bahnkurve eines Teilchens durch

$$\mathbf{r}(\varphi) = r(\varphi)\hat{\mathbf{r}}, \quad r(\varphi) = \frac{k}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$$

mit $0 \leq \epsilon < 1$, $k > 0$ beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Minimal- und Maximalwerte von r, und skizzieren Sie die Bahnkurve.

(b) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})$ zur Bahnkurve.

Aufgabe 5 Äquipotentialflächen .... [6P]

Gegeben sei nun das Vektorfeld $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}e^{r^2}$.
Beantworten Sie die folgenden Fragen, *ohne* das Potential auszurechnen.

(a) Besitzt das Feld Quellen oder Wirbel?

(b) Was ist die Richtung des stärksten Anstiegs des Potentials im Punkt $(1,1,0)^T$?

(c) Wie sehen die Äquipotentialflächen aus? Machen Sie sich bewusst wie das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ dazu steht.

Aufgabe 6 Linienintegral eines Kraftfeldes* .... [10P]

Betrachten Sie das Kraftfeld $\mathbf{F} = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, dass durch die Vektoren $\mathbf{v} = (1,\, 0,\, 3)^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{w} = (z,\, x,\, y)^{\mathrm{T}}$ definiert ist. Berechnen Sie das Linienintegral $I_C = \oint\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$, wobei die Kurve C ein Kreis mit Radius R um den Ursprung in der Ebene $\{(x,y,z=z_0)|x,y,z \in \mathbb{R}, z_0 = \text{const.}\}$ ist. Der infinitesimale Vektor d**s** verläuft entlang des Weges.
Ist dieses Kraftfeld konservativ?

Aufgabe 7 Volumen eines Parallelepipeds .... [5P]

Berechnen Sie mit Methoden der Vorlesung das Volumen des durch drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannten Parallelepipeds. $\mathbf{a}$ ist der Vektor von Punkt $P = (0,1,1)$ nach Punkt $Q = (1,1,3)$. $\mathbf{b}$ ist der Vektor zwischen P und $R = (4/3, 3/2, 1)$, und $\mathbf{c}$ der Vektor zwischen P und $S = (5/4, 1, 2)$.