Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 5

[Beachte: Abgabe bis Mo, 25.5, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Fragen zur Vorlesung .... [5P]

(a) Welche zwei Arten der Berechnung der Determinante haben wir kennengelernt? det(.) ist ein Maß für was?

(b) Mit welcher Identität lässt sich $[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)][(\mathbf{a}_4 \times \mathbf{a}_5) \cdot (\mathbf{a}_6 \times \mathbf{a}_6)]$ auf Skalarprodukte allein reduzieren?

(c) Wo ist das Problem bei folgendem Ausdruck? $a_{ij} a_{im} = b_{jm} b_m$.

(d) Welchen Winkel schließen Impuls und Drehimpuls eines Teilchens ein?

(e) Wenn die 1-Form $\omega(\mathbf{r}) := \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ gegeben ist mit dem Skalarfeld $\phi(\mathbf{r})$, wie sieht dann $f(\mathbf{r})$ aus, für das $\omega(\mathbf{r}) = \mathrm{d}f(\mathbf{r})$ gilt?

Aufgabe 2 Totale Ableitung .... [6P]

Führen Sie die Ableitung vollständig aus für

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t, x(t), y(t))}{\mathrm{d}t^2} \; . \tag{1}$$

Aufgabe 3 Frenetsche Formeln* .... [8P]

Gegeben sei eine Schraubenlinie

$$\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \; , \tag{2}$$

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ b\, t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0 \; . \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie das *begleitende Dreibein* $(\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}})$. Wählen Sie dabei a so, dass $\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}\right\|$ unabhängig von t ist.

(b) Mit dem Ergebnis aus (a): Bestimmen Sie nun Krümmung κ und Torsion τ der Schraubenlinie.

(c) Wann ist $\tau = 0$? Wann ist $\kappa = 0$? Interpretieren Sie!

(d) Zeigen Sie für den allgemeinen Fall die Gültigkeit der Frenetschen Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}s} = \tau \hat{\mathbf{b}} - \kappa \hat{\mathbf{t}} \; . \tag{4}$$

Aufgabe 4 Taylorentwicklung in 3D .... [6P]

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Taylorentwicklung bis zur $2.^{\text{ten}}$ Ordnung und prüfen Sie die Aussage des *Satzes von Schwarz*[1] an den Entwicklungspunkten P.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \exp\big(x^2 + y^2\big)$ um $P = (0, 1)$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \frac{\sin(x)+z^2}{\cos(y)+x}$ um $P = (\pi, 0, 1)$.

Aufgabe 5 Integrabilitätsbedingung* .... [7P]

Ist folgende 1-Form

$$\omega = (3 + 2y^2)\,\mathrm{d}x + 4xy\,\mathrm{d}y \tag{5}$$

ein Differential? Falls ja, finden Sie die Stammfunktion f, so dass $\mathrm{d}f = \omega$.

Aufgabe 6 Gradient und Divergenz .... [10P]

(a) Zeigen Sie, dass für Skalarfelder Φ_i gilt:

$$\boldsymbol{\nabla}(\Phi_1\Phi_2) = \Phi_2\boldsymbol{\nabla}(\Phi_1) + \Phi_1\boldsymbol{\nabla}(\Phi_2)\ . \tag{6}$$

(b) Bestimmen Sie die Gradienten der folgenden Skalarfelder

   (i) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{r}) = \frac{x^2+y^2}{z^3}$,

   (ii) $g : \mathbb{R}^{+3} \to \mathbb{R}$, $g(\mathbf{r}) = \exp\big(x^2\big) + \ln\Big(\frac{z}{y}\Big)x$.

(c) Zeigen Sie, das für zwei Vektorfelder des $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})\ . \tag{7}$$

(d) Bestimmen Sie die Divergenz von $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

(e) Für welches α ist $\mathbf{k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} xz - \frac{1}{2}yx^2 \\ z + y^2x \\ \frac{\alpha}{2}z^2 - zxy \end{pmatrix}$ quellenfrei?

---

[1] In n Dimensionen gilt der Satz für die Reihenfolge der Differentiationen bzgl. aller Richtungen!