Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 4

[Beachte: Abgabe bis Mo, 18.5, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Skalar- und Kreuzprodukt .... [3P]

Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ und $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ für

(a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 Die Dreiecksungleichung .... [(3+2)P]

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Dreiecksungleichung:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq a + b,$$

mit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ und $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$.

(b) Zeigen Sie außerdem:

$$|a - b| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq a + b.$$

Beachte: $|\cdot|$ bezeichnet hier die euklidische Norm eines Vektors als auch den Betrag eines Skalars.

✎ Sie können die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

Aufgabe 3 Fragen zur Vorlesung .... [5P]

(a) Warum ist der Betrag des Vektors eine Norm? (siehe auch Brückenkurs)

(b) Wo ist das Problem bei der Angabe $\dim(\mathbb{C})$, bzw., was wird stillschweigend vorausgesetzt?

(c) Welches Produkt ist nicht assoziativ?

(d) Wann ist ein einzelner Vektor linear abhängig?

(e) Ist $(1, 2, 3, 4) \to (2, 1, 4, 3)$ eine gerade oder ungerade Permutation?

Aufgabe 4 Integrale über sin(x) und cos(x)* .... [6P]

Das Integral $J(m,n)$ sei für nichtnegative, ganze Zahlen m und n wie folgt definiert:

$$J(m,n) = \int_0^{\pi/2} \cos^m(\theta)\sin^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Zeigen Sie über partielle Integration, dass für $m,n>1$ folgende Rekursionen gelten:

$$J(m,n) = \frac{m-1}{m+n}J(m-2,n) \quad \text{und} \quad J(m,n) = \frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)\,.$$

Aufgabe 5 Das Levi-Civita Symbol (Epsilon-Tensor)* .... [8P]

(a) Begründen Sie, dass der Epsilontensor ϵ_{ijk} (i, j, $k = 1,\ldots,3$) auch als folgende Determinante geschrieben werden kann:

$$\epsilon_{ijk} \;=\; \det\begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix},$$

wobei δ_{nm} das Kronecker-Delta ist.

(b) Leiten Sie die folgende Identität

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ilm} \;=\; \delta_{jl}\,\delta_{km} \;-\; \delta_{jm}\,\delta_{kl},$$

durch explizite Rechnung und unter Verwendung von (a) nach.

Aufgabe 6 Vektorprodukt .... [6P]

Es seien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita Symbols:

(a) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \;=\; \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$,

(b) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \;=\; \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) \;-\; \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$,

(c) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \;=\; (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) \;-\; (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$.