Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 3

[Beachte: Abgabe bis Mo, 11.5, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Taylorreihe .... [3+2 P]

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylor-Reihe

(a) bis zur dritten Ordnung um $x_0 = 1$

$$(i)\ \ (1+2x)^\beta, \quad (ii)\ \ \alpha^x, \quad (iii)\ \ \ln(x),$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$, und $\alpha > 0$,

(b) bis zur vierten Ordnung um $x_0 = 0$

$$(i)\ \ \sin(x+1), \quad (ii)\ \ (x-4)^3.$$

Aufgabe 2 Fragen zur Vorlesung .... [7P]

(a) Welche zwei Eigenschaften definieren die Exponentialfunktion eindeutig?

(b) In welchem Beweis haben wir (a) benutzt?

(c) Auf was wird die Berechnung von a^b mit $a, b \in \mathbb{C}$ zurückgeführt?

(d) Welche wichtige Forderung an die physikalischen Gesetzte steht im Zusammenhang mit Vektoren?

(e) Können wir eine Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ die aus C^n mit $n \in \mathbb{N}$ ist in eine Taylorreihe entwickeln? Begründe!

(f) Sei $F[f]$ ein Funktional mit f aus einem Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$. Es gilt $F[\alpha g] = \alpha F[g]$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$. Ist F ein lineares Funktional?

(g) Sein V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\mathbf{a} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Welche zwei Multiplikationen werden mit der üblichen Schreibweise $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ nicht unterschieden?

Aufgabe 3 Dirac-δ-Distribution .... [10P]

Betrachte die Funktionenfolge

$$(\delta_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\sin(nx)}{\pi x}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass im Limes $n \to \infty$ diese Funktionenfolge gegen die Dirac-δ-Distribution konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \delta(x). \tag{2}$$

Aufgabe 4 Lineare Unabhängigkeit .... **[8P]**

(a) Gegeben seien drei Vektoren des $\mathbb{R}^4$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, ob diese Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und stellen Sie den Vektor $\mathbf{u} = (1, 2, 2)^T$ in dieser Basis dar.

Aufgabe 5 Skalarprodukt* .... **[8P]**

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Orthonormalbasis von $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ an.

(b) Finden Sie einen Vektor $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ der sowohl auf $\mathbf{v}_1$ als auch auf $\mathbf{v}_2$ senkrecht steht.

Aufgabe 6 Taylorreihe des $\arctan$***** .... **[8P]**

Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{3}$$

gilt.

✐ Nutzen Sie die Integralform des $\arctan(x)$ und die geometrische Reihe.