Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 2

[Beachte: Abgabe bis Mo, 4.5, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Tangens Hyperbolicus .... [4P]

Der *Tangens Hyperbolicus* auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch $\tanh(x) := (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion des Tangens Hyperbolicus. Finden Sie dabei die richtige Einschränkung der Definitions- und Zielmenge, so dass die Funktion bijektiv ist. Bestimmen Sie außerdem die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe 2 Ableitungsregeln .... [4P]

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sqrt{x^2+a^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(\sin^2(3x)\right)\right]^{\frac{1}{3}},$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $n = 1, 2$.

Aufgabe 3 Integrale* .... [10P]

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int e^{ax}\cos(2x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \sin(x)e^{\cos(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{e^{a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 Trigonometrische Zusammenhänge .... [6P]

(a) Formen Sie folgenden Ausdruck in ein Produkt um

$$\cos(a) + \cos(b)\ .$$

(b) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right)\ .$$

Aufgabe 5 Delta-Distribution .... [8P]

Zur Beschreibung von Punktladungen verwendet man in der Elektrodynamik die Delta-'Funktion' $\delta(x)$. Vom mathematischen Standpunkt aus ist die Delta-'Funktion' eine Distribution (siehe Vorlesung). Sie kann für Testfunktionen $f(x)$ über eine Integration definiert werden durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0)\ .$$

(a) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie

$$\delta(a(x-x_0)) = \frac{1}{|a|}\delta(x-x_0) \quad \& \quad \delta(x-x_0) = \delta[-(x_0-x)]\ .$$

(b) Zeigen Sie für eine Funktion $g(x)$ mit einfachen Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$, deren Ableitung $g'(x)$ bei $x_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ stetig ist, dass

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|(g'(x_i))|}\delta(x-x_i)$$

gilt.

Aufgabe 6 Die Eulersche Gammafunktion* .... [6P]

Die Eulersche Gammafuntktion ist für $x > 0$ definiert durch das Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie durch partielle Integration die folgende Eigenschaft der Gammafuntion:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\Gamma(n+1) = n!$ zu beweisen.

(c) Welcher Wert ergibt sich für $\Gamma(1/2)$?

☞ Gaußsches Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.