Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*

Blatt 13

[Beachte: Abgabe bis Mo, 20.7, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Fragen zur Vorlesung .... [3P]

(a) Wir haben ein LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, bestehend aus 3 Gleichungen, als drei Ebenengleichungen interpretiert. Wie sieht die gemeinsame Schnittmenge der Ebenen aus, wenn $\det(A) = 0$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ und nicht alle Cramerschen Determinanten Null sind?

(b) Sei $\det(A) = 1$. Ist A orthogonal?

(c) Hat der Rotationsoperator $R(\alpha)$, der die Rotation um den Ursprung mit Winkel α beschreibt, Eigenwerte? Falls ja, wann und welche?

Aufgabe 2 Inverse Matrix* .... [4P]

Gegeben seien die quadratischen $N \times N$ Matrizen. Zeigen Sie, das gilt

$$(AB \ldots G)^{-1} = G^{-1} \ldots B^{-1} A^{-1}. \tag{1}$$

Aufgabe 3 Inverse einer Matrix und Lösung eines Gleichungssystems .... [6P]

Gegeben sei das LGS

$$\begin{aligned} 7x + 2y + z &= 21 \ , \\ 3y - z &= 5 \ , \\ -3x + 4y - 2z &= \ -1 \ , \end{aligned}$$

mit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) Überführen Sie das LGS in eine Matrixgleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Überprüfen Sie dann (ohne das LGS zu lösen) ob das LGS eine Lösung besitzt und ob diese eindeutig ist.

(b) Lösen Sie das LGS durch finden der Inversen zu A. Benutzen Sie dazu die *Cramersche Regel*.

Aufgabe 4 Lösungsraum .... [6P]

Zeigen Sie, dass der Lösungsraum $\mathcal{L}$ für $Au_b = b$ die Form

$$\mathcal{L} = \{u_b + u | u \in L_0; \ u_b : \text{partikuläre Lösung von } Au_b = b\} \tag{2}$$

hat.[1] Dabei bezeichnet $\mathcal{L}_0$ den Loesungsraum fuer das homogene LGS $Au = 0$.

[1] Eine *partikuläre Lösung* ist eine beliebige Lösung der inhomogenen Gleichung.

Aufgabe 5 Gaußsches Eliminationsverfahren* .... [8P]

(a) Lösen Sie das LGS

$$
\begin{aligned}
-6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \,, \\
-9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \,, \\
-3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \,, \\
-15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \,,
\end{aligned}
$$

mittels *Gaußschem Eliminationsverfahren*.

(b) Welchen Rang besitzt der lineare Operator A des LGS $Ax = b$ in (a)?

Aufgabe 6 Eigenwertproblem .... [6P]

In der Vorlesung wurden gekoppelte Oszillatoren als Beispiel für ein Eigenwertproblem diskutiert, die entsprechende Eigenwertgleichung ergab sich zu

$$A\alpha = \omega^2 \alpha \tag{3}$$

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+s & -s \\ -s & k+s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(a) Ist die Matrix A *normal*?

(b) Geben Sie das *charakteristische Polynom* der obigen Eigenwertgleichung an.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Eigenwertproblems.